MATEMATIKA

ALGEBRA

ELSŐSEGÉLY KIT ISKOLÁSOKNAK

A 2016-OS ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEINEK
MEGFELELŐ OKTATÁSI SEGÉDANYAG

Tartalomjegyzék

1. A matematikai logika elemei

1.1. Az ítéletkalkulus elemei

Értelmezés. Ítéletnek nevezünk egy jól meghatározott dologra vonatkozó kijelentő mondatot, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis.
Megjegyzés. Egy ítélet nem lehet egyidőben igaz is és hamis is és az sem lehetséges, hogy igaz se és hamis se legyen.
Értelmezés. Egy ítélethez egyértelműen hozzérendelhetjük az 1 vagy 0
logikai értéket: ha az ítélet igaz, akkor logikai értéke 1, ha hamis, akkor logikai értéke 0 (itt az „1” és ”0” szimbólumokat és nem számokat jelölnek).
Jelölés. Az ítéletek jelölésére a $p,q,r,\ldots$ kisbetűket használjuk.

Példa. Ítéletek: „Minden négyzetben van derékszög.”- igaz, logikai értéke 1;
„Egy háromszög szögeinek mértékének összege 110°.”-hamis, logikai értéke 0;
„Az egyenlő oldalú háromszögben az oldalak kongruensek.”- igaz, logikai értéke 1.

Nem ítéletek: „$x+3=10$”- nem lehet eldönteni, hogy igaz vagy hamis: létezik olyan x érték, amelyre igaz ($x=7$) és van olyan x is, amelyre hamis (például az $x=1$);
„Egy háromszögben az oldalak kongruensek.”- az egyenlő oldalú háromszög esetében igaz, minden más esetben hamis.

Ítélet tagadása

Értelmezés. A p ítélet **tagadása** a „non p” ítélet (jelölés: $\neg p$ vagy $\overline{p}$), amely igaz, ha p hamis és hamis, ha p igaz.

Logikai érték-táblázat:

p	$\neg p$
0	1
1	0

Megjegyzés. A p és $\neg(\neg p)$ ítéletek logikai értéke megegyezik.
Szóbeli közlésben a tagadást általában a „nem” szóval fejezzük ki.

Példa. A p: „Kettő plusz három nagyobb négynél.” igaz ítélet tagadása a $\neg p$: „Kettő plusz három nem nagyobb négynél.” hamis ítélet.
Matematikailag ezt így írjuk le: p: „$2+3>4$”, $\neg p$: „$2+3\not>4$”.

A „Minden kutya fekete.” hamis ítélet tagadása a „Van olyan kutya, amely nem fekete.” igaz állítás.

Ítéletek konjunkciója

Értelmezés. A p és q ítéletek **konjunkciója** a „p és q” ítélet (jelölés: $p\wedge q$), amely csak akkor igaz, ha mind a p, mind a q igaz (ha p és q közül legalább az egyik hamis, akkor $p\wedge q$ hamis).

Logikai érték-táblázat:

p	q	$p\wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Megjegyzés. Szóbeli közlésben a konjunkciót általában az „és” szóval fejezzük ki.

Ítéletek diszjunkciója

Értelmezés. A p és q ítéletek **diszjunkciója** a „p vagy q” ítélet (jelölés: $p \vee q$), amely csak akkor hamis, ha mind a p, mind a q hamis (ha p és q közül legalább az egyik igaz, akkor $p \vee q$ igaz).

Logikai érték-táblázat:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Megjegyzés. Szóbeli közlésben a diszjunkciót általában a „vagy” szóval fejezzük ki.

Értelmezés. A $p, q, r, \ldots$ egyszerű ítéletekből a $\neg, \vee, \wedge$ logikai operátorok véges számú alkalmazásával alkotott új ítéleteket **összetett ítéleteknek** nevezzük.
Megjegyzés. Az ítéletkalkulus azt vizsgálja, hogy egy összetett ítélet logikai értéke hogyan függ az őt alkotó egyszerű ítéletek logikai értékétől.

Ítéletek implikációja

Értelmezés. A p,q ítéletek **implikációján** a $((\neg p) \vee q)$ összetett ítéletet értjük (jelölés: $p \to q$, „p implikálja q-t”, „p-ből következik q”). A táblázatból kitűnik, hogy $p \to q$ akkor és csakis akkor hamis, ha p igaz és q hamis.

Logikai érték-táblázat:

p	q	$\neg p$	$p \to q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Megjegyzés. Szóbeli közlésben a $p \to q$ implikációt általában a „ha p, akkor q” módon fejezzük ki. A $p \to q$ implikációban p neve **feltevés**, a q neve **következmény**.

Példa. A p: „A 2 egy páros szám.”, q:„A Föld gömb alakú.” ítéletek esetén

- $p \to q$: „Ha a 2 egy páros szám, akkor a Föld gömb

3. Sorozatok, haladványok

3.1. Sorozatok

Értelmezés. Legyen A egy nem üres halmaz. Egy $f:\mathbb{N}^* \to A$ függvényt az A elemeinek egy **sorozatának** nevezzük.
Jelölés. Az $f(n)$ értéket a *sorozat n-edik tagjának* (n-ed rangú tag, n indexű tag) nevezzük és a_n-nel (b_n, c_n) jelöljük. Egy sorozatot általában zárójelbe tett kisbetűvel jelölünk: (a_n), $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, (b_n).
Értelmezés. Ha A egy számhalmaz, egy $f:\mathbb{N}^* \to A$ függvényt **számsorozatnak** nevezzünk.

Sorozatok megadási módjai

Egy sorozat lehet:

- leíró módon értelmezett: az n. tagot valamely egyértelmű tulajdonság alapján definiáljuk, vagy megadjuk az első néhány tagot, amíg egyértelművé válik a szabály;
- képlettel (szabállyal) értelmezett: adott a képlet, mely explicit módon meghatározza, hogyan kell kiszámítani az n. tagot;
- rekurziós képlettel értelmezett: adott az első tag (az első néhány tag) és egy képlet, mely megadja, hogy az n. tagot hogyan fejezzük ki az előző tag (tagok) segítségével.

Feladat. *Adott az* $(x_n)_{n\geq 1}$ *sorozat, ahol* $x_n=-10+7n$, $\forall n\geq 1$. *Írjuk fel az első három tagot! Tagja-e a sorozatnak a* 99*? Hát a* 123?

M. $x_1=-10+7\cdot 1=-3$, $x_2=-10+7\cdot 2=4$, $x_3=-10+7\cdot 3=11$.

A 99 akkor tagja a sorozatnak, ha valamely $k\in\mathbb{N}^*$ indexre $x_k=99$. Az x_k képlete alapján $-10+7k=99\Leftrightarrow k=\frac{109}{7}\notin\mathbb{N}^*$. Tehát 99 nem eleme a sorozatnak.

Ha valamely $k\in\mathbb{N}^*$ indexre $x_k=123$, akkor $-10+7k=123\Leftrightarrow k=\frac{133}{7}=19\in\mathbb{N}^*$. Tehát 123 a sorozat 19. tagja.

Feladat. *Az* $(x_n)_{n\geq 1}$ *sorozatot az* $x_1=1$ *kezdőértékkel és az* $x_n=2x_{n-1}+1$, $\forall n\geq 1$ *rekuziós képlettel értelmezzük. Írjuk fel az első négy tagot és az általános tag* (a_n) *képletét!*

M. $x_1=1$; a rekurziós összefüggésbe $n=2$-t, majd $n=3$-t, $n=4$-t helyettesítve: $x_2=2x_1+1=3$, $x_3=2x_2+1=7$, $x_4=2x_3+1=15$.

Ezen értékek alapján megsejthetjük az általános tag képletét: $x_n=2^n-1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

A $P(n)$: „$x_n=2^n-1$”, $n\in\mathbb{N}^*$ állítás helyességét a matematikai indukció módszerével igazoljuk:

I. $n=1$: $P(1)$:„$x_1=2^1-1$”, igaz.

II. Feltételezve, hogy $P(k)$ igaz, igazoljuk, hogy $P(k+1)$ is igaz:

$$x_{k+1}\overset{rek.}{=}2x_k+1\overset{ind.felt.}{=}2(2^k-1)+1=2^{k+1}-1.$$

A matematikai indukció elve alapján $x_n=2^n-1$, $\forall n\geq 1$.

Korlátos sorozatok

Értelmezés. Egy sorozatot **korlátosnak** nevezünk, ha van két olyan m,M szám, amelyre $m\leq a_n\leq M$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Tétel. Egy $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozat pontosan akkor korlátos, ha létezik olyan $M>0$ szám, amelyre $|a_n|\leq M$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Feladat. *Igazoljuk, hogy az (a_n) sorozat korlátos, ahol $a_n=\dfrac{n+2}{2n+3}$.*

M. Az első néhány tag felírásával ($a_1=\frac{3}{5}$, $a_2=\frac{4}{7}$, $a_3=\frac{5}{9}$) úgy tűnik, hogy a sorozat tagjai 1-nél kisebbek. Igazoljuk ezt a sejtést:

$$a_n<1\Leftrightarrow\frac{n+2}{2n+3}<1\Leftrightarrow n+2<2n+3\Leftrightarrow 0<n+1.$$

Alsó korlátot könnyű találni: 0. Tehát $0<a_n<1$.

Feladat. *Igazoljuk, hogy az $x_0\in[-5,2]$, $x_{n+1}=2\sin(x_n)+1$ sorozat korlátos!*

M. $\sin(x_n)\in[-1,1]\Rightarrow 2\sin(x_n)\in[-2,2]\Rightarrow 2\sin(x_n)+1\in[-1,3]\Rightarrow$
$x_{n+1}\in[-1,3]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.
Tehát $x_0\in[-5,2]$, $x_2,x_3,\ldots\in[-1,3]$, így $x_n\in[-5,3]$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Monoton sorozatok

Értelmezés. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat

- **növekvő**, ha $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén $a_n\le a_{n+1}$;
- **szigorúan növekvő**, ha $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén $a_n<a_{n+1}$;
- **csökkenő**, ha $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén $a_n\ge a_{n+1}$;
- **szigorúan csökkenő**, ha $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén $a_n>a_{n+1}$.

Értelmezés. Az (a_n) sorozat

- **monoton**, ha növekvő vagy csökkenő;
- **szigorúan monoton**, ha szigorúan növekvő vagy szigorúan csökkenő.

Példa. Az $a_n=1+2+3+\ldots+n$ általános tagú $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat szigorúan növekvő.
A $b_n=\left[\frac{n}{3}\right]$ általános tagú (b_n) sorozat ($[A]$ az A szám egész részét jelöli) (nem szigorúan) növekvő: $b_1=0$, $b_2=0$, $b_3=1$, $b_4=1$, $b_5=1$, $b_6=2$, …
Az $x_n=\frac{1}{n}$ általános tagú $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat szigorúan csökkenő.

Monotonitás vizsgálata

A gyakorlatban az (a_n) sorozat monotonitását vizsgálhatjuk

- az $a_{n+1}-a_n$ különbség 0-hoz való viszonyának tanulmányozásával: ha ez a különbség n-től függetlenül
  - pozitív, akkor a sorozat növekvő,
  - negatív, akkor a sorozat csökkenő;
- (pozitív tagú sorozatok esetén) az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hányados 1-hez való viszonyának tanulmányozásával: ha ez a hányados n-től függetlenül
  - 1-nél nagyobb, akkor a sorozat növekvő,
  - 1-nél kisebb, akkor a sorozat csökkenő.

Feladat. *Vizsgáljuk az* $a_n=\frac{n+2}{2n+1}$ *általános tagú sorozat monotonitását!*

M. I. megoldás. $a_{n+1}-a_n=\frac{n+3}{2n+3}-\frac{n+2}{2n+1}=-\frac{3}{(2n+3)(2n+1)}<0$, tehát a sorozat csökkenő.

II. megoldás. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{n+3}{2n+3}}{\frac{n+2}{2n+1}}=\frac{2n^2+7n+3}{2n^2+7n+6}<1$, tehát a sorozat csökkenő.

4.5. Függvény grafikus képe

Értelmezés. Az $f:A\to B$ **grafikonja** a G_f halmaz, ahol
$$G_f=\{(x,y)\mid x\in A, y=f(x)\}=\{(x,f(x))\mid x\in A\}.$$

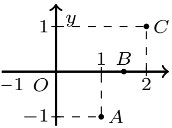
Példa. Az $f:\{-3,0,1,5\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ függvény grafikonja:
$$G_f=\{(-3,-5);\ (0,1);\ (1,3);\ (5,11)\}.$$

Feladat. *A* $G_1=\{(1,3);\ (4,-5);\ (5,-5)\}$ *és* $G_2=\{(1,3);\ (4,-5);\ (4,5)\}$ *halmazok közül melyik lehet egy függvény grafikonja?*

M. Az $f:\{1,4,5\}\to\mathbb{R}$, $1\overset{f}{\mapsto}3$, $4\overset{f}{\mapsto}-5$, $5\overset{f}{\mapsto}-5$ függvény grafikonja G_1. A G_2 halmaz nem lehet egy függvény grafikonja, mert az $x=4$ elemhez két érték is hozzá van rendelve (a -5 és az 5).

Értelmezés. **Descartes-féle** vagy **derékszögű koordinátarendszernek** nevezünk két, egymásra merőleges Ox és Oy egyenest, amelyeken kijelöltünk egy-egy pozitív irányt és egy-egy egységet.
Értelmezés. Ha $f:A\to B$ egy számfüggvény és a síkban rögzített egy derékszögű koordinátarendszer, akkor a sík $(x,f(x))$, $x\in A$ koordinátájú pontjainak halmazát az f **grafikus képének** nevezzük.

Feladat. *Ábrázoljuk az* $f:\{1;1{,}5;2\}\to\mathbb{R}$*,* $f(x)=2x-3$ *függvény grafikus képét!*
M.



$f(1)=-1$, $f(1{,}5)=0$, $f(2)=1$, így a függvény grafikonja $G_f=\{(1,-1);(1{,}5,0);(2,1)\}$.
A grafikus kép az $A(1,-1)$, $B(1{,}5,0)$, $(2,1)$ pontokból áll.

Grafikus kép megrajzolása

Egy $f:A\to B$ számfüggvény grafikus képét általában úgy szerkesztjük meg, hogy különböző $x\in A$ értékekre kiszámítjuk az $y=f(x)$ behelyettesítési értékeket, ábrázoljuk az $(x,f(x))$ koordinátájú pontokat és ezek alapján megpróbáljuk elképzelni a grafikus képet.
Emellett figyelembe vehetjük a függvényről szóló (elméleti) ismereteinket:
- a függvény tulajdonságait:

- *értelmezési tartomány*: az Ox-tengelynek csak az értelmezési tartománynak megfelelő részét kell ábrázolni;
- *képhalmaz*: az Oy-nak csak az Imf-nek megfelelő részét kell ábrázolni;
- *fontosabb pontok*: pl. a koordináta-tengelyekkel való metszéspontok: ha $0\in A$, akkor $G_f\cap Oy=\{(0,f(0))\}$, $G_f\cap Ox=\{(x_0,0)|\ x_0\in A, f(x_0)=0\}$;
- *periodicitás*: ha $T>0$ a függvény egy periódusa, a grafikus képet elegendő egy T hosszúságú intervallumon megrajzolni (pl. $[0,T]$-n);
- *paritás*: ha f páros, akkor f grafikus képe szimmetrikus az Oy-tengelyre nézve; ha f páratlan, akkor f képe szimmetrikus az O pontra nézve;
- *folytonosság*: szemléletesen, f folytonos egy $I\subseteq A$ intervallumon, ha I-re való leszűkítésének grafikus képe folytonos vonallal megrajzolható;
- *aszimptoták*
- *korlátosság, szélsőértékek*
- *monotonitás*
- *előjel*: ha $f(x)>0$ ($f(x)<0$), $x\in I$, $I\subseteq A$, akkor f-nek I-re való leszűkítésének képe az Ox-tengely fölött (alatt) helyezkedik el;

Grafikus kép megrajzolása - folytatás

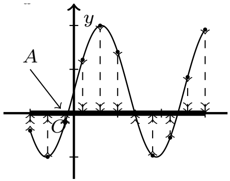
- *konvexitás, inflexiós pontok*
- *bijektivitás, inverz függvény*: ha f bijektív, akkor f és f^{-1} grafikus képe szimmetrikus az első szögfelezőre (az $y{=}x$ egyenesre) nézve;

- a matematikai analízis eszközei által szolgáltatott adatokat.

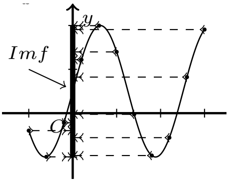
4.6. A tulajdonságok mértani jelentése

$G_f \leftrightarrow$ értelmezési tartomány, Imf

Az $f\!:\!A\!\to\!B$ számfüggvény grafikus képének ábrázolása során az Ox-tengelynek csak az A-nak megfelelő része, az Oy tengelynek pedig csak az Imf-nek megfelelő része érdekel.
Fordítva, ha adott a függvény grafikus képe (G_f), az értelmezési tartomány a G_f-nek az Ox-re eső vetülete, az Imf pedig a G_f-nek az Oy-ra eső vetülete.



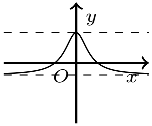
$A{=}[-1{,}3]$



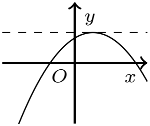
$Imf{=}[-1{,}2]$

$G_f \leftrightarrow$ korlátosság

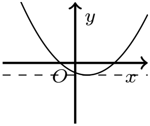
Az $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor korlátos m alsó és M felső korláttal, ha a grafikus kép az $y=m$ és $y=M$ vízszintes egyenesek közt helyezkedik el.
Ha a grafikus kép nem szoríthatató be két vízszintes egyenes közé, akkor f nem korlátos.



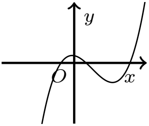
korlátos



felülről korlátos
alulról nem korlátos



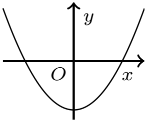
felülről nem korlátos
alulról korlátos



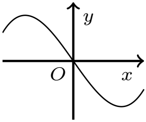
felülről nem korlátos
alulról nem korlátos

$G_f \leftrightarrow$ paritás

Az f függvény pontosan akkor páros, ha grafikus képe szimmetrikus az Oy-tengelyre nézve.
Az f függvény pontosan akkor páratlan, ha grafikus képe szimmetrikus az O pontra nézve.



f páros



f páratlan

7. Kombinatorika

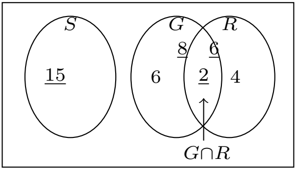
7.1. A kombinatorika alapszabályai

Összegzési szabály

Tétel. Ha az A kiválasztására n_A lehetőségünk van (az A elemet n_A elem közül választhatjuk ki), a B (C,…) kiválasztására n_B (n_C, …) lehetőségünk van és ezek a lehetőségek mind különbözőek, akkor az A vagy B (vagy C, …) kiválasztásra $n_A+n_B(+n_C+\ldots)$ lehetőség van.
Megjegyzés. Halmazelméleti jelölésekkel ez a szabály így írható ($|M|$ az M halmaz elemeinek számát jelöli): $|A\cup B|=|A|+|B|$, ha $A\cap B=\emptyset$.
Tétel. Ha az A kiválasztására n_A, a B kiválasztására n_B lehetőségünk van és ezek a lehetőségek közt m közös ($m\leq n_A,n_B$), akkor az A vagy B kiválasztásra n_A+n_B-m lehetőség van.
Megjegyzés. Halmazelméleti jelölésekkel ez a szabály így írható:
$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ (**szitaformula**).

Példa. Ha egy tolltartóban van 3 grafitceruza, 12 színes ceruza és 4 golyóstoll, akkor egy akármilyen ceruza kiválasztására $3+12=15$, egy akármilyen írószer kiválasztására pedig $3+12+4=19$ lehetőségünk van.
Feladat. *Egy osztály tanulói közül 8-an német, 6-on magyar szakkörre járnak. Tudva, hogy 2 tanuló mindkét szakkörre jár, 15 tanuló pedig egyikre sem, határozzuk meg az osztálylétszámot!*
M. Ha N-nel (M-mel) jelöljük azon tanulók halmazát, akik németórára (magyarórára) járnak, illetve S-sel azok halmazát, akik

egyik szakkört sem látogatják, akkor a feladat feltételei szerint $|N|=8$, $|M|=6$, $|N\cap M|=2$, $|S|=15$.
Az összegzési szabály szerint azon tanulók száma, akik legalább egyik szakkörre járnak, $|N\cup M|=|N|+|M|-|N\cap M|=8+6-2=12$. Mivel egy gyerek vagy jár legalább az egyik szakkörre,



vagy egyikre sem jár (azaz $N\cup M$ és S diszjunkt halmazok), szintén az összegzési szabály szerint az osztálylétszám $|(N\cup M)\cup S|=|N\cup M|+|S|=12+15=27$.

Feladat. 1*-től* 100*-ig hány természetes szám osztható 6-tal vagy 8-cal?*

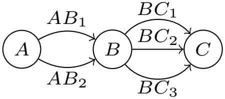
M. Az $A=\{x\in\mathbb{N}|\ 1\le x\le 100,\ x\,\vdots\,6\}$ és $B=\{x\in\mathbb{N}|\ 1\le x\le 100,\ x\,\vdots\,8\}$ jelölésekkel $A=\{1\cdot6,2\cdot6,3\cdot6,\ldots,16\cdot6\}$, $B=\{1\cdot8,2\cdot8,3\cdot8,\ldots,12\cdot8\}$, így $|A|=16$, $|B|=12$ és $A\cap B=\{x\in\mathbb{N}|\ 1\le x\le 100,\ x\,\vdots\,6,\ x\,\vdots\,8\}=\{x\in\mathbb{N}|\ 1\le x\le 100,\ x\,\vdots\,[6,8]=24\}=\{24,48,72,96\}$, $|A\cap B|=4$. A szitaformula szerint $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=16+12-4=24$.

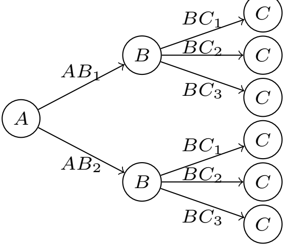
Szorzási szabály

Tétel. Ha az A kiválasztására n_A lehetőségünk van (az A elemet n_A elem közül választhatjuk ki), a B kiválasztására n_B lehetőségünk van az A kiválasztásától függetlenül, akkor a A, B választások egymás utáni elvégzésére (vagyis (A,B) páros kiválasztására) $n_A\cdot n_B$ lehetőség van.
Megjegyzés. Halmazelméleti jelölésekkel ez a szabály így írható ($|M|$ az M halmaz elemeinek számát jelöli): $|A\times B|=|A|\times|B|$.

Példa. Ha az A városból a B városba 2 úton lehet eljutni (AB_1 és AB_2), a B-ből C-be 3 út vezet (BC_1, BC_2, BC_3) (lásd a bal oldali „térképet”), akkor az A-ból C-be vezető különböző útvonalak száma $2 \cdot 3 = 6$.

Az ilyen szituációk ábrázolására gyakran **fadiagramot** használunk (jobb oldali ábra).





Példa. Egy kislánynak van 4 pár cipője, 3 szoknyája, 5 blúza és 2 mellénye van. Hányféleképpen lehet felöltöztetni a kislányt, ha mindegyik ruhadarab mindegyik ruhadarabbal talál?

A lehetőségek fadiagrammal való ábrázolása túl terjedelmes ábrát adna (és felesleges is), ezért csak a lehetőségek számát jelenítjük meg egy táblázatban:

Ruhadarab	cipő	szoknya	blúz	mellény
Darabszám	4	3	5	2
cipő-választási lehetőségek száma	4			
(cipő,szoknya) lehetőségek száma		$4 \cdot 3$		
(cipő,szoknya, blúz) száma			$4 \cdot 3 \cdot 5$	
(cipő,szoknya, blúz, mellény) száma				$4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2$

Összesen tehát $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 120$ féle öltöztetési lehetőség van.

Megjegyzés. A gyakorlatban a fenti táblázatot általában összevontabb formában írjuk fel:

Ruhadarab	cipő	szoknya	blúz	mellény	összesen
	___	___	___	___	
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
Lehetőségek száma	4	3	5	2	$\boxed{4\cdot3\cdot5\cdot2=120}$

Feladat. *Hány négyjegyű természetes szám képezhető az* $\{1,3,5,7,9\}$ *halmaz elemeivel?*

M. Egy négyjegyű szám __ __ __ __ alakú. Az első helyre az 1,3,5,7,9 számjegyek valamelyike kerülhet (ez 5 lehetőség). Attól függetlenül, hogy az első helyre melyik számjegyet írtuk be, a második helyre az 1,3,5,7,9 számjegyek valamelyike kerülhet (szintén 5 lehetőség). A harmadik, negyedik helyre ugyanez vonatkozik.Összesen tehát $5\cdot5\cdot5\cdot5=625$ számot képezhetünk.

1.	2.	3.	4.	számjegy
___	___	___	___	
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
5	5	5	5	lehetőség

Feladat. *Hány négyjegyű, különböző számjegyekből álló természetes szám képezhető az* $\{0,2,4,6,8\}$ *halmaz elemeivel?*

M. Egy négyjegyű szám __ __ __ __ alakú. Az első helyre az 2,4,6,8 számjegyek valamelyike kerülhet- egy szám nem kezdődhet 0-val- ez 4 lehetőség. Attól függetlenül, hogy az első helyre melyik számjegyet írtuk be, a második helyre négy számjegy kerülhet (az, hogy melyik négy, az függ attól, hogy melyik számjegyet írtuk be az első helyre, de a lehetőségek száma- ez érdekel minket- mindig 4 marad). A harmadik helyre 3, a negyedik helyre 2 lehetőség marad. Összesen tehát $4\cdot4\cdot3\cdot2=96$ számot képezhetünk.

1.	2.	3.	4.	számjegy
___	___	___	___	
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
4	4	3	2	lehetőség

Feladat. *Határozzuk meg azon* $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2,3,4,5\}$ *függvények számát, amelyekre* $f(0)$ *páratlan szám és* $f(1)=f(3)$.

M. Az f függvény értelmezési tartománya és értékkészlete meghatározott, a megfeleltetési szabály nem adott. Véges függvényről lévén szó, ezt legkönnyebben értéktáblázat formájában adhatjuk meg. Az első helyre (az $f(0)$ értékhez) az 1,3,5 értékek valamelyike kerülhet- ez három lehetőség. Az $f(1)$ értéknek a

$0,1,2,3,4,5$ számok bármelyike megfelel- hat lehetőség; ugyanígy az $f(2)$ értéknél.

x	0	1	2	3
$f(x)$	___	___	___	___
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
lehetőségek száma	3	6	6	1

Az utolsó helyre írható érték már egyértelműen meghatározott, hiszen mire az $f(3)$ értékhez eljutottunk, már beírtuk az $f(1)$ értékét és $f(3)=f(1)$. Összesen tehát $3\cdot6\cdot6\cdot1=108$ ilyen függvény létezik.

Értelmezés. **Rendezett halmaznak** nevezünk egy halmazt, amelyben rögzített az elemek sorrendje.
Jelölés. Rendezett halmazok esetén az elemeket kerek zárójelek közé teszük: $(a,b)\neq(b,a)$, de $\{a,b\}=\{b,a\}$.
Jelölés. Az $1\cdot2\cdot\ldots n$, $n\geq2$ szorzatot **n-faktoriálisnak** nevezzük és így jelöljük: $n!$. Megegyezés szerint $0!=1$, $1!=1$.

7.2. Permutációk

Értelmezés. Az A véges ($|A|=n$) halmaz egy **permutációja** alatt az A elemeinek egy (n-elemű) rendezett halmazát értjük.
Jelölés. Egy n elemű halmaz permutációinak számát P_n-nel jelöljük.
Tétel. Az n elemű permutációk száma $P_n=n!$, $\forall n\geq1$.

Példa. Az $A=\{a,b\}$ halmaz permutációi: (a,b), (b,a).
A $B=\{x,y,z\}$ halmaz permutációinak halmaza:
$$\{(x,y,z),(x,z,y),(y,x,z),(y,z,x),(z,x,y),(z,y,x)\}.$$

Feladat. *A $4,5,6,7,8$ számjegyekkel hány különböző számjegyekből álló 5-jegyű szám képezhető?*

12. Polinomok

12.1. Polinomgyűrű

Legyen $(R,+,\cdot)$ egy kommutatív gyűrű és tekintsük az

$$R[X]=\{(a_k)_{k\geq 0} \mid a_k\in R,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\colon a_n=0, \forall n\geq n_0\}$$

halmazt (a halmaz elemei olyan R-beli sorozatok, amelyeknek csak véges sok nullától különböző elemük van). Az $R[X]$ halmazon értelmezzük

- az összeadás: $(a_k)_{k\geq 0}+(b_k)_{k\geq 0}=(c_k)_{k\geq 0}$, ahol $c_k=a_k+b_k$, $\forall k\geq 0$ és
- a szorzás: $(a_k)_{k\geq 0}\cdot(b_k)_{k\geq 0}=(c_k)_{k\geq 0}$, ahol $c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\ldots+a_kb_0$, $\forall k\geq 0$

belső műveleteket.

Tétel. Az $R[X]$ halmaz a $+$ és $\cdot$ műveletekkel egy kommutatív gyűrű, melyet az R **feletti polinomgyűrűnek** nevezünk.

12.2. Polinom algebrai alakja

Az $X=(0,1,0,0,\ldots)\in R[X]$ jelöléssel a $P=(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,0,0,\ldots)$ $R[X]$-beli elem $P=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n$ alakba írható.

Értelmezés. Az P polinom $f=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n$ alakba való felírását a P **algebrai alakjának** nevezzük.

Példa. A $(5,-3,4,0,2,0,0,\dots)\in\mathbb{Z}[X]$ algebrai alakja a $P=5-3X+4X^2+2X^4$.

Polinom fokszáma

Értelmezés. A P **fokszáma** (jelölés: gr$P$) n, ha $a_n\neq 0$ és $a_m=0, \forall m>n$.
Tétel. Ha $P,Q\in R[X]$, akkor

- gr$(P+Q)\leq\max\{$gr$P$,gr$Q\}$,
- gr$(P\cdot Q)\leq$gr$P+$gr$Q$.

Tétel. Ha $(R,+,\cdot)$ integritás-tartomány, akkor

- gr$(P\cdot Q)=$gr$P+$gr$Q$, $\forall P,Q\in R[X]$ és
- $R[X]$ is integritás-tartomány.

Példa. Ha $P=1+2X+3X^2+4X^3\in\mathbb{Q}[X]$, $Q=1-2X+3X^2-4X^3\in\mathbb{Q}[X]$, akkor gr$P=3$, gr$Q=3$, $P+Q=2+6x^2$, gr$(P+Q)=2$.
Ha $P=\hat{3}+\hat{6}X^2\in\mathbb{Z}_8[X]$, $Q=\hat{2}+\hat{7}X+\hat{4}X^3\in\mathbb{Z}_8[X]$, akkor gr$P=2$, gr$Q=3$, $P\cdot Q=\hat{6}+\hat{5}X+\hat{4}X^2+\hat{6}X^3$, gr$(P\cdot Q)=3$.

Polinomfüggvény

Ha $P=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n\in R[X]$ egy polinom és $x\in R$, akkor az $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n\in R$ elemet a P polinom x-ben vett **behelyettesítési értékének** nevezzük és $P(x)$-szel jelöljük.
Értelmezés. A $p\colon R\to R$, $p(x)=P(x)$, $\forall x\in R$ függvényt a P-hez rendelt **polinomfüggvénynek** nevezzük.