MATEMATICĂ

ALGEBRĂ

KIT DE PRIM AJUTOR PENTRU ELEVI

MATERIAL ELABORAT CORESPUNZÂND
CERINȚELOR DE BACALAUREAT 2016

Cuprins

1. Elemente de logică matematică

1.1. Propoziţii

Definiţie. Se numeşte **propoziţie** un enunţ declarativ despre care se poate decide dacă este adevărat sau fals.
Observaţie. O propoziţie nu poate fi în aceeaşi timp şi adevărată şi falsă.
Definiţie. Unei propoziţii îi putem atribui una din cele două **valori de adevăr** "1" sau "0": dacă propoziţia este adevărată, valoarea sa de adevăr este 1, iar valoarea de adevăr a unei propoziţii false este 0 ("1" şi "0" sunt simboluri, nu reprezintă numere).
Notaţie. Propoziţiile se notează cu literele mici $p,q,r,\dots$.

Exemplu. Sunt propoziţii: "În fiecare pătrat există un unghi drept."- propoziţie adevărată, valoarea sa de adevăr este 1;
"suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu 110°."- falsă, valoarea sa de adevăr este 0;
"Într-un triunghi echilateral toate laturile sunt de lungime egală."-adevărată, valoarea sa de adevăr este 1.

Nu sunt propoziţii (în sensul logicii matematice): "$x+3=10$"- nu se poate decide dacă este advărată sau falsă: pentru $x=7$, propoziţia "$7+3=10$" este adevărată, iar pentru alte valori ale lui x propoziţia este falsă;
"Într-un triunghi laturile sunt congruente."- în cazul triunghiului echilateral propoziţia este adevărată, în alte cazuri este falsă.

Negaţia unei propoziţii

Definiţie. **Negaţia** propoziţiei p este propoziţia "non p", notată $\neg p$ sau $\overline{p}$, care este adevărată dacă p este falsă şi falsă dacă p este adevărată.

Tabelul de adevăr al lui $\neg p$:

p	$\neg p$
0	1
1	0

Observaţie. Propoziţia $\neg(\neg p)$ are aceeaşi valoarea de adevăr ca şi p. Pentru a nega o propoziţie, se pune în faţa ei expresia "nu e adevărat că".

Exemplu. Negaţia propoziţiei adevărate p: "$2+3>4$" este $\neg p$: "$2+3\not>4$".
Negaţia propoziţiei false "Fiecare câine este neagră." este propoziţia adevărată"Există câine care nu este neagră".

Conjuncţia propoziţiilor

Tabelul de advăr al lui $p\wedge q$:

p	q	$p\wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definiţie. **Conjuncţia** propoziţiilor p, q este propoziţia "p şi q", notată $p\wedge q$, care este adevărată numai atunci când atât p cât şi q sunt adevărate, fiind falsă în celelate cazuri.

Observaţie. Pentru a exprima conjuncţia propoziţiilor p, q, punem între cele două propoziţii cuvântul "şi".

Disjuncţia propoziţiilor

Tabelul de advăr al lui $p\vee q$:

p	q	$p\vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Definiţie. **Disjuncţia** propoziţiilor p, q este propoziţia "p sau q", notată $p\vee q$, care este falsă numai atunci când atât p cât şi q sunt false, fiind adevărată în celelate cazuri.

Observaţie. Pentru a exprima disjuncţia propoziţiilor p, q, punem între cele două propoziţii cuvântul "sau".

Definiţie. Din propoziţiile simple $p, q, r, \ldots$ prin aplicarea de un număr finit de ori a conectorilor logici $\neg, \vee, \wedge$ se pot crea **propoziţii compuse**.
Observaţie. Calculul propoziţiilor studiază propoziţiile compuse din punctul de vedere al adevărului sau falsului în raport cu valorile logice ale propoziţiilor simple care le compun.

Implicaţia propoziţiilor

Definiţie. Se numeşte **implicaţia** propoziţiilor p şi q propoziţia $((\neg p) \vee q)$ şi se notează $p \rightarrow q$ ("p implică q").

Tabelul de advăr al lui $p \rightarrow q$:

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Din tabelul de adevăr constatăm că $p \rightarrow q$ este falsă numai dacă p este adevărată şi q este falsă, fiind adevărată în celelate cazuri. **Observaţie.** Implicaţia propoziţiilor p, q se exprimă astfel: "dacă p atunci q". În implicaţia $p \rightarrow q$ p se numeşte **ipoteză**, iar q se numeşte **concluzia** implicaţiei.

Exemplu. Considerând propoziţiile p: "Numărul 2 este par." şi q: "Pământul este sferic.":

- $p \rightarrow q$: "Dacă numărul 2 este par atunci Pământul este sferic."- propoziţie falsă, ipoteza fiind adevărată şi concluzia falsă;
- $q \rightarrow p$: "Dacă Pământul este sferic, atunci numărul 2 este par."- propoziţie adevărată, ipoteza fiind falsă şi concluzia adevărată.

2. Numere reale

2.1. Numere reale

Notaţie.
$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$ **mulţimea numerelor naturale;**
$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ **mulţimea numerelor întregi;**
$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\, m,n\in\mathbb{Q},n\neq 0\right\}$ **mulţimea numerelor raţionale;**
$\mathbb{R}$ **mulţimea numerelor reale**
$\mathbb{I}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ **mulţimea numerelor iraţionale;**
$\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Observaţie. $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$, $\mathbb{Q}\cap\mathbb{I}=\emptyset$.

Proprietăţile adunării numerelor reale

- *asociativitate:* $(x+y)+z=x+(y+z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ $(\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q})$;
- *comutativitate:*
  $x+y=y+x$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ $(\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q})$;
- *există element neutru*:
  $\exists 0\in\mathbb{R}$ astfel încât $x+0=0+x=x$,
  $\forall x\in\mathbb{R}$ $(\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q})$;
- *orice număr întreg (raţional, real) are un opus:*
  $\forall x\in\mathbb{Z}$ $(\mathbb{Q},\mathbb{R})$, $\exists(-x)\in\mathbb{Z}$ $(\mathbb{Q},\mathbb{R})$
  astfel încât $x+(-x)=0$.

Proprietăţile înmulţirii numerelor reale

- *asociativitate:*
  $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ $(\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q})$;
- *comutativitate:* $x\cdot y=y\cdot x$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ $(\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q})$;
- *există element neutru*:
  $\exists 1\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\cdot 1=1\cdot x=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $(\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q})$;
- *orice număr real nenul este inversabil:*
  $\forall x\in\mathbb{Q}^*$ $(\mathbb{R}^*)$, $\exists\,\frac{1}{x}\in\mathbb{Q}^*$, $(\mathbb{R}^*)$ astfel încât $x\cdot\frac{1}{x}=1$;
- Distributivitatea înmulţirii faţă de adunare:
  $x(y+z)=xy+xz$, $(x+y)z=xz+yz$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

Problemă. *Să se demonstreze că numărul $\sqrt{2}$ este iraţional.*

S. Presupunând că $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ există numerele $a,b\in\mathbb{N}$, $b\neq 0$ astfel încât $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, iar $\frac{a}{b}$ este ireductibilă. Ridicând la pătrat, $2=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow a^2=2b^2$, deci a^2 este par $\Rightarrow a$ este par $\Rightarrow a=2k$, $k\in\mathbb{N}$. Atunci $4k^2=2b^2\Rightarrow 2k^2=b^2$, deci b^2 este par $\Rightarrow b$ par $\Rightarrow b=2l$, $l\in\mathbb{N}$. Dar atunci $a=2k$, $b=2l$, aşadar fracţia $\frac{a}{b}$ este reductibilă prin 2, conrar ipetezei. Deci $\sqrt{2}$ nu este reductibilă.

Divizibilitate

Definiţie. Numărul întreg a este **divizibil** cu numărul întreg b dacă există un număr întreg c astfel încât $a=b\cdot c$.

Notaţie. $a\,\vdots\, b$ ("a este divizibil cu b") sau $b|a$ ("b divide a").

Teoremă. (*Teorema împărţirii cu rest*) Fiind date numerele $a\in\mathbb{N}$ şi $b\in\mathbb{N}^*$, există şi sunt unice numerele $q,r\in\mathbb{N}$ astfel încât $a=bq+r$ şi $0\leq r<b$.

Divizibilitate - continuare

Teoremă. Fie $a,b,c\in\mathbb{N}^*$. Atunci

- dacă $a|b$ şi $b|c$, atunci $a|c$ (*tranzitivitate*);
- dacă $a|b$ atunci $ma|mb$, $\forall m\in\mathbb{N}^*$;
- dacă $a|b$ şi $a|c$, atunci $a|ma+nb$, $\forall m,n\in\mathbb{N}^*$.

Definiţie. Un număr $p\geq 2$ se numeşte **număr prim** dacă p are exact doi divizori: 1 şi p.

Fracţii zecimale

Definiţie. O fracţie zecimală de forma $\overline{a_0,a_1a_2a_3\ldots}$ se numeşte

- **fracţie zecimală finită**, dacă are un număr finit de cifre zecimale;
- **fracţie zecimală periodică simplă**, dacă are un grup de zecimale, numit perioadă, care se repetă la infinit,incepând imediat după virgulă: $\exists p\in\mathbb{N}$, $p\geq 1$ astfel încât $a_{n+p}=a_n$, $\forall n\geq 1$;
- **fracţie zecimală periodică mixtă**, dacă perioada nu incepe imediat după virgulă: $\exists k,p\in\mathbb{N}$, $p\geq 1$, $k\geq 2$ astfel încât $a_{n+p}=a_n$, $\forall n\geq k$.

Exemplu. Fracţie zecimală finită: $-12{,}003$.

Fracţie zecimală periodică simplă: $13{,}248248248\ldots \overset{jel.}{=} 13{,}(248)$.

Fracţie zecimală periodică mixtă: $-23{,}0487271271\ldots \overset{jel.}{=} -23{,}0487(271)$.

Teoremă. Orice număr raţional poate fi transformat într-o fracţie zecimală finită sau într-o fracţie zecimală periodică simplă sau mixtă.

Problemă. *Să se transforme în fracţii zecimale:* $\frac{137}{40}$, $\frac{19}{21}$, $\frac{433}{330}$.

S. Se împarte numărătorul la numitor: $\frac{137}{40}=137:40=3,425$ (fracţie zecimală finită), $\frac{19}{21}=19:21=0,904761904761...=0,(904761)$ (fracţie zecimală periodică simplă), $\frac{433}{330}=433:330=1,3121212...=1,3(12)$ (fracţie zecimală periodică mixtă).

Teoremă. Orice fracţie zecimală finită sau fracţie zecimală periodică simplă sau mixtă poate fi transformată într-o fracţie ordinară.

Problemă. *Să se transforme următoarele fracţii zecimale în fracţii ordinare:* $3,25$; $1,335$; $0,(36)$; $-2,(693)$; $3,2(35)$; $1,01(2)$.

S. Transformarea unei fracţii zecimale finite: $3,25=3\frac{25}{100}=3\frac{1}{4}$, $1,335=1\frac{335}{1000}$.

Transformarea unei fracţii zecimale periodice simple:

$$-2,(693)=-2\frac{693}{999}=-2\frac{77}{111},\ 0,(36)=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}.$$

Transformarea unei fracţii zecimale periodice mixte:

$$1,01(2)=1\frac{12-1}{900}=1\frac{11}{900},\ 3,2(35)=3\frac{235-2}{990}=3\frac{233}{990}.$$

Definiţie. Partea întreagă a numărului real x este numărul întreg (notat cu $[x]$) cel mai mare, mai mic sau egal cu x.

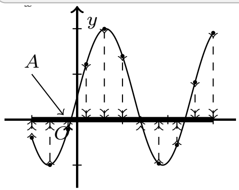
$$[x]=k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow k\leq x<k+1.$$

Definiţie. Partea fracţională a numărului x este numărul $\{x\}=x-[x]\in[0,1)$.

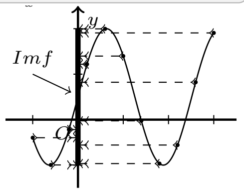
4.6. Graficul şi proprietăţile funcţiei

$G_f \leftrightarrow$ domeniul de definiţie, imaginea Imf

În cursul reprezentării graficului funcţiei numerice $f\colon A\to B$ ne interesează fragmentul din plan corespunzătoare produsul cartezian $A\times Imf$.
Dacă graficul lui f este trasată, domeniul de definiţie al lui f este proiecţia lui G_f pe axa Ox, iar Imf este proiecţia lui G_f pe Oy.



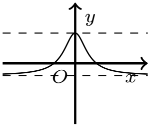
$A=[-1,3]$



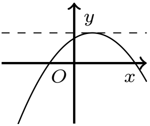
$Imf=[-1,2]$

$G_f \leftrightarrow$ mărginire

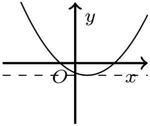
Funcţia $f\colon A\to\mathbb{R}$ este mărginită cu margine inferioară m şi margine superioară M dacă graficul lui f este situată între dreptele orizontale de ecuaţie $y=m$ şi $y=M$. Dacă graficul lui f nu poate fi cuprinsă între două drepte orizontale, atunci f nu este mărginită.



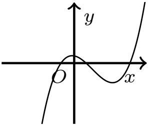
mărginită



mărginită superior
nemărginită inferior



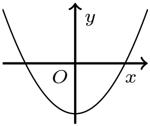
nemărginită superior
mărginită inferior



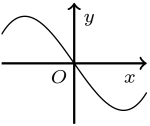
nemărginită superior
nemărginită inferior

$G_f \leftrightarrow$ paritate

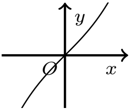
Funcţia f este pară dacă graficul lui f este simetrică pe axa Oy.
Funcţia f este impară dacă graficul lui f este simetrică pe punctul O.



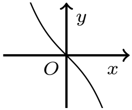
f par



f impar



f crescătoare



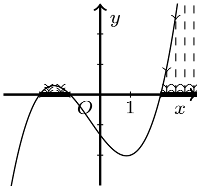
f descrescătoare

$G_f \leftrightarrow$ monotonitate

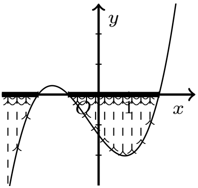
Graficul unei funcţii strict crescătoare, de la stânga la dreapta, “se ridică”.
Graficul unei funcţii strict descrescătoare, de la stânga la dreapta, “se coboară”.

$G_f \leftrightarrow$ semnul funcţiei

Funcţia numerică $f\colon A \to \mathbb{R}$ intersectează axa Ox în punctele $(x_0, 0)$ unde $f(x_0)=0$, deci x_0 este o soluţie a ecuaţiei $f(x)=0$. Abscisele punctelor de intersecţie ale graficului cu axa Ox determină valorile aproximative ale soluţiilor.
Faptul că funcţia f este pozitivă (negativă) pe o mulţime $M \subseteq A$, este chivalent cu faptul că imaginea geometrică a lui f corespunzătoare mulţimii M se află deasupra axei Ox (sub axa Ox).
Dacă imaginea geometrică a lui f este trasată, mulţimea soluţiilor inegalităţii $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) este alcătuită din proiecţiile pe Ox ale punctelor de pe grafic care se află deasupra axei Ox (sub axa Ox).
Observaţie. Funcţiile continue îşi menţin semnul constant între două rădăcini consecutive: dacă f este continuă pe A, $f(x_1)=f(x_2)=0$, $x_1<x_2$, $(x_1,x_2) \subseteq A$ şi $f(x) \neq 0$, $\forall x \in (x_1,x_2)$, atunci $f(x) \cdot f(y) \geq 0$, $\forall x,y \in (x_1,x_2)$.



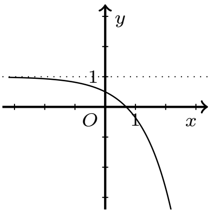
$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-2,-1]\cup[2,\infty)$



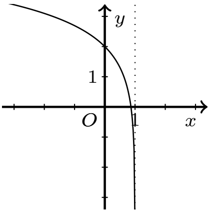
$f(x)< 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(-1,2)$

$G_f \leftrightarrow$ Asimptote

Definiţie. Dreapta d se numeşte o **asimptotă** a graficului funcţiei $f: A\to B$ $A,B\subseteq\mathbb{R}$, dacă distanţa dintre un punct de pe curbă şi dreapta d tinde spre 0, când abscisa punctului tinde spre $\pm\infty$.
Deosebim trei tipuri de asimptote: verticală, orizontală şi oblică.



$y=1$
asimptotă orizontală



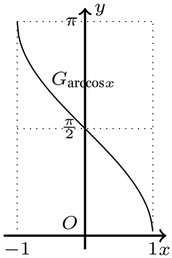
$x=1$
asimptotă verticală

5.16. Funcţia arccosinus

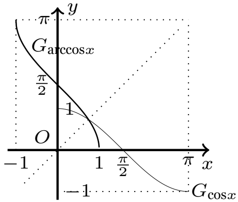
Definiţie. Inversa funcţiei bijective $g:[0,\pi]\to[-1,1]$, $g(x)=\cos x$ este **funcţia arccosinus**: $f:[-1,1]\to[0,\pi]$, $f(x)=\arccos x$.
Din definiţie rezultă că

$$\arccos x=\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = x,\ \alpha\in(0,\pi).$$

Reprezentarea geometrică:



Funcţiile $f:[-1,1]\to[0,\pi]$, $f(x)=\arccos x$ şi $g:[0,\pi]\to[-1,1]$, $g(x)=\cos x$ sunt funcţii inverse, deci reprezentarea lor geometrică este simetrică faţă de dreapta $y=x$:



Valori remarcabile

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Tabelul de variaţie şi de semne

x	-1				0				1
$\arccos x$	$-\pi$	$+$	$\searrow$	$+$	$\frac{\pi}{2}$	$+$	$\searrow$	$+$	0

Problemă. *Determinaţi domeniul maxim de definiţie pentru funcţia* $f:D\to\mathbb{R}$*,* $f(x)=\arccos(1-2x)$*!*

S. Argumentul lui arccos trebuie să aparţină intervalului $[-1,1]$: $D=\{x\in\mathbb{R}|\ 1-2x\in[-1,1]\}$.

$1-2x\in[-1,1]\Leftrightarrow -2x\in[-2,0]\Leftrightarrow x\in[0,1]$, deci $D=[0,1]$.

Problemă. *Să se calculeze* $\arccos(\cos 6)$.

S. Fie $\arccos(\cos 6)=\alpha$, atunci $\cos\alpha=\cos 6$ şi $\alpha\in[0,\pi]\approx[0;3,14]$. Din relaţia $\cos(x)=\cos(2\pi-x)$ rezultă că $\cos 6=\cos(2\pi-6)$ şi $2\pi-6\approx 0,28\in[0,\pi]$, deci $\arccos(\cos 6)=\alpha=2\pi-6$.

Proprietăţile funcţiei arccosinus

Definiţie	$f:[-1,1]\to[0,\pi]$, $f(x)=\arccos x$
Imaginea lui f	$Imf=[0,\pi]$
Puncte de intersecţie cu axe	$G_f\cap Oy=\{\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\}$ $G_f\cap Ox=\{(1,0)\}$
Periodicitate	f nu este periodică
Paritate	f nu este pară, nu e impară: $\arccos(-x)=\pi-\arcsin x$
Continuitate	curbă continuă
Asimptote	nu există
Mărginire	f este mărginită: $0\leq\arccos x\leq\pi$, $\arccos x=0\Leftrightarrow x=1$, $\arccos x=\pi\Leftrightarrow x=-1$
Monotonie	f este strict descrescătoare pe $[-1,1]$
Semnul funcţiei	$\arccos x\geq 0$, $\forall x\in[-1,1]$
Convexitate	f este convexă pe $[-1,0]$, f este concavă pe $[0,1]$

Proprietăţile funcţiei arccosinus - continuare

Punct de inflexiune	$x=0$
Bijectivitate	f este bijectivă
Funcţia inversă	$f^{-1}:[0,\pi]\to[-1,1]$, $f^{-1}(x)=\cos x$

Problemă. *Să se demonstreze că* $2\arcsin\dfrac{1}{3}=\arccos\dfrac{7}{9}$.

S. Cu notaţiile $\arcsin\frac{1}{3}=\alpha$ şi $\arccos\frac{7}{9}$, din definiţie $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\beta=\frac{7}{9}$, $\beta\in[0,\pi]$. Trebuie să demostrăm că $2\alpha=\beta$.

Din teorema fundamentală a trigonometriei $\cos^2\alpha=\frac{8}{9}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ cosinusul este pozitiv, deci $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. În mod analog, $\sin\beta=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}=\sin\beta$.

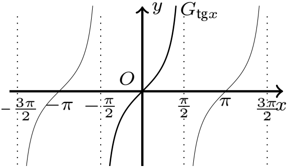
Faptul că $\sin(2\alpha)=\sin\beta$ nu înseamnă că $2\alpha=\beta$ (funcţia sin nu este injectivă, o altă posibilitate este $2\alpha=\pi-\beta$). Dar $\sin\alpha>0\Rightarrow\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow2\alpha\in(0,\pi)$; $\sin(2\alpha)>0\Rightarrow2\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. $\cos\beta>0\Rightarrow\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Deci $\sin(2\alpha)=\sin\beta$, $2\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, de unde $2\alpha=\beta$.

5.17. Funcţia tangentă

Definiţie. Funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{tg}x$ se numeşte **funcţia tangentă**.

Reprezentarea geometrică graficului:



Valori remarcabile

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
tg$x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabelul de monotonie

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
tg$x$	$\infty\vert_{-\infty}$	$\nearrow$	$\infty\vert_{-\infty}$	$\nearrow$	$\infty\vert_{-\infty}$	$\nearrow$	$\infty\vert_{-\infty}$

Tabelul de semne

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
tg$x$	$-0+\ +\ +\vert-\ -\ -0+\ +\ +\vert-\ -\ -0+\ +\ +\vert-$					

Proprietăţile funcţiei tangentă

Definiţie	$f:\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=$ tg$x$
Imaginea lui f	$Imf=\mathbb{R}$
Puncte de intersecţie cu axe	$G_f\cap Oy=\{(0,0)\}$ $G_f\cap Ox=\{(k\pi,0)\mid k\in\mathbb{Z}\}$
Periodicitate	periodică, perioada principală: $T=\pi$

Proprietăţile funcţiei tangentă - continuare

Paritate	f este impară: $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}x$, centrul de simetrie : O
Continuitate	curbă continuă pe $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
Asimptote	$x = \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ asimptotaă verticală
Mărginire	nu este mărginită
Monotonie	f e strict crescătoare pe $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
Semnul funcţiei	$\mathrm{tg}x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ şi $\mathrm{tg}x < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2}+k\pi, (k+1)\pi\right]$
Convexitate	f este convexă pe $\left[k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ f este concavă pe $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, (k+1)\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ Puncte de inflexiune: $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
Bijectivitate	f nu este bijectivă (nu e injectivă, este surjectivă)
Restricţia bijectivă	$f_b : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f_b(x) = \mathrm{tg}x$ inversa lui f: $f_b^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f_b^{-1}(x) = \mathrm{arctg}x$

7. Elemente de combinatorică

7.1. Reguli generale ale combinatoricii

Regula sumei

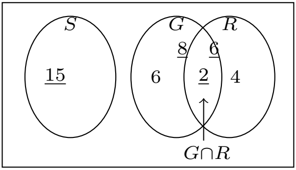
Teoremă. Dacă obiectul A poate fi ales în n_A moduri, obiectul B (C,...) poate fi ales în $n_B(n_C, \ldots)$ moduri şi nici o alegere a lui A nu coincide cu nici o alegere a lui B (C,...), atunci alegerea "A sau B" (sau C, ...) poate fi realizată în $n_A+n_B(+n_C+\ldots)$ moduri.
Observaţie. Această regulă poate fi prezentată sub forma: pentru mulţimile disjuncte A şi B, $|A\cup B|=|A|+|B|$, unde $|M|$ înseamnă numărul de elemente ale mulţimii M.
Teoremă. Dacă obiectul A poate fi ales în n_A moduri, obiectul B în n_B moduri, iar m posibilităţi de alegerea lui A şi a lui B coincid ($m\leq n_A, n_B$), atunci alegerea "A sau B" poate fi realizată în n_A+n_B-m moduri.
Observaţie. Fie mulţimile A,B. Atunci $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

Exemplu. Într-un penar sunt 3 creioane de grafit, 12 creioane colorate şi 4 pixuri, atunci alegerea unui creion poate fi realizată în $3+12=15$ moduri, iar pentru alegerea unui rechizite sunt $3+12+4=19$ posibilităţi.

Problemă. *Elevii unei clase urmează cursuri astfel încât* 8 *merg la germană,* 6 *la română. Ştiind că* 2 *dintre elevi urmează ambele cursuri iar* 15 *nu face nici un curs, să se determine efectivul clasei.!*
S. Se notează cu G (R) mulţimea elevilor care frecventează cursul de germană (română), iar cu S mulţimea celor care nu urmează cursuri. Atunci $|G|=8$, $|R|=6$, $|G\cap R|=2$, $|S|=15$.

După regula sumei numărul elevilor care urmează cel puţin un curs, este

$$|G\cup R|=|G|+|R|-|G\cap R|=8+6-2=12.$$



Mulţimile $G\cup R$ şi S sunt disjuncte, astfel conform regulei sumei, $|(G\cup R)\cup S|=|G\cup R|+|S|=12+15=27$.

Problemă. *Între* 1 *şi* 100 *câre numere naturale se divid cu* 6 *sau* 8*?*

S. Cu notaţiile $A=\{x\in\mathbb{N}|\quad 1\le x\le 100,\quad x\,\vdots\,6\}$ şi $B=\{x\in\mathbb{N}|\quad 1\le x\le 100,\quad x\,\vdots\,8\}$, $A=\{1\cdot 6,2\cdot 6,3\cdot 6,\ldots,16\cdot 6\}$, $B=\{1\cdot 8,2\cdot 8,3\cdot 8,\ldots,12\cdot 8\}$, deci $|A|=16$, $|B|=12$ şi $A\cap B=\{x\in\mathbb{N}|\quad 1\le x\le 100,\quad x\,\vdots\,6,\quad x\,\vdots\,8\}=\{x\in\mathbb{N}|\quad 1\le x\le 100,\ x\,\vdots\,[6,8]=24\}=\{24,48,72,96\}$, $|A\cap B|=4$. Atunci

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=16+12-4=24.$$

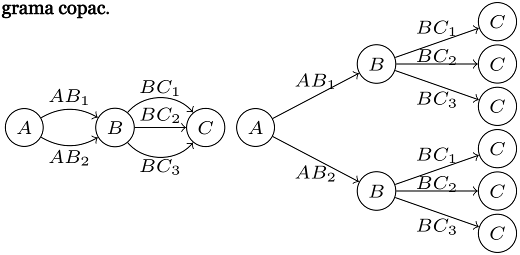
Regula produsului

Teoremă. Dacă obiectul A poate fi ales în n_A moduri, şi dacă după fiecare astfel de alegere, obiectul B se poate alege în n_B moduri, atunci alegerea perechii (A,B) poate fi realizată în $(n_A\cdot n_B)$ moduri.

Observaţie. Fie mulţimile A şi B. Atunci $|A\times B|=|A|\times|B|$.

Exemplu. Între oraşele A şi B sunt două drumuri (AB_1 şi AB_2), din A în C putem ajunge în trei moduri (BC_1, BC_2, BC_3) (vezi "harta" de mai jos). Atunci din A în C putem ajunge în $2\cdot 3=6$ moduri diferite.

Pentru reprezentarea unor astfel de situaţii se poate folosi **diagrama copac**.



Exemplu. O fetiţă are 4 perechi de papuci, 3 fustiţe, 5 bluziţe şi 2 vestuţe. În câte feluri se poate îmbrăca fetiţa?

Reprezentarea tuturor posibilităţilor pe o diagramă copac ar fi prea amplă (şi nici nu este necesară), de aceea reprezentăm doar numărul posibilităţilor:

Vestimentaţie	papuci	fustiţă	bluziţă	vestuţă
Număr bucăţi	4	3	5	2
numărul posibilităţilor alegerii papucilor	4			
numărul posibilităţilor (papuci,fustiţe)		$4\cdot3$		
(papuci,fustiţe, bluziţe)			$4\cdot3\cdot5$	
(papuci,fustiţe, bluziţe, vestuţe)				$4\cdot3\cdot5\cdot2$

În total sunt $4\cdot3\cdot5\cdot2=120$ posibilităţi.

Observaţie. De obicei, se formulează un tabel simplificat:

Vestimentaţie	papuci	fustiţă	bluziţă	vestuţă	total
	↑	↑	↑	↑	
Nr. posibilităţi	4	3	5	2	$\boxed{4\cdot3\cdot5\cdot2=120}$