MATEMATICĂ

GEOMETRIE ȘI ANALIZĂ MATEMATICĂ

MATERIAL ELABORAT CORESPUNZÂND CERINȚELOR DE BACALAUREAT 2016

Cuprins

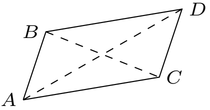
1. Vectori

1.1. Segmente orientate. Vectori în plan

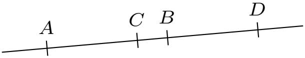
Segmente orientate

Definiţie. Perechea ordonată de puncte (A,B) se numeşte **segment orientat** şi se notează cu $\overline{AB}$.
Definiţie. Segmentele orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt **echipolente** (se notează cu $\overline{AB} \sim \overline{CD}$), dacă mijlocul segmentului $[AD]$ coincide cu mijlocul lui $[BC]$.
Observaţie. Dacă $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, atunci există o translaţie care transformă segmentul $\overline{AB}$ în segmentul $\overline{CD}$.
Proprietăţi. Pe mulţimea segmentelor orientate relaţia de echipolenţă este o relaţie de echivalenţă:

- $\overline{AB} \sim \overline{AB}$ ($\sim$ este *reflexivă*),
- dacă $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, atunci $\overline{CD} \sim \overline{AB}$ ($\sim$ este *simetrică*),
- dacă $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ şi $\overline{CD} \sim \overline{EF}$, atunci $\overline{AB} \sim \overline{EF}$ ($\sim$ este *tranzitivă*).



$\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt echipolente dacă şi numai dacă $ABDC$ este paralelogram sau punctele A,B,C,D sunt coliniare şi mijlocul lui $[AD]$ coincide cu mijlocul lui $[BC]$.

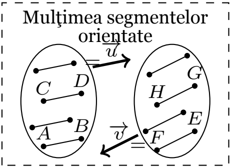


Vectori

Definiţie. Se numeşte **vector** mulţimea tuturor segmentelor orientate echipolente cu un segment dat.
Notaţie. Vectorul determinat de segmentul orientat $\overline{AB}$ se notează cu $\overrightarrow{AB}$ (sau cu litere mici): $\overrightarrow{AB} = \left\{\overline{CD} | \ \overline{CD} \sim \overline{AB}\right\}$.

Observaţie. Dacă $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, atunci $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Dacă $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, atunci spunem că segmentul $\overline{AB}$ (sau $\overline{CD}$) este un **reprezentant** al vectorului $\overrightarrow{u}$.
Definiţie. Lungimea (sau **modulul**) unui vector este lungimea oricărui reprezentant al său şi se notează cu $|\overrightarrow{u}|$.
Definiţie. Vectorul de lungime nulă $\overrightarrow{AA}$ se numeşte **vectorul nul** şi se notează $\vec{0}$.

Definiţie. Vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt **egali** ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$), dacă segmentele orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt echipolente.
Observaţie. Doi vectori sunt egali dacă au acelaşi modul, aceeaşi direcţie şi sens.
Teoremă. (*Existenţa reprezentantului cu origine dată*) Pentru orice vector $\overrightarrow{u}$ şi orice punct M, există un unic segment orientat $\overline{MM'}$ pentru care $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MM'}$.
Consecinţă. Dacă $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$, atunci $A = B$.



$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \ldots$,
$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH} = \ldots$,
$\overline{CD}$ este un reprezentant al vectorului $\overrightarrow{u}$,
z $\overline{EF}$ este un reprezentant al lui $\overrightarrow{v}$,
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

2. Geometrie analitică

Reper cartezian în plan

Fie xx' şi yy' două axe perpendiculare care se intersectează în punctul O.
Definiţie. Sistemul (xOx',yOy') se numeşte **reper cartezian** sau **reper ortonormat**. Punctul O se numeşte **originea** reperului. Semidreapta $[Ox$ este **semiaxa pozitivă**, $[Ox'$ este **semiaxa negativă**.
Notaţie. Reperul (xOx',yOy') se notează (xOy). Vectorii unitate (**versorii**) pentru axele $[Ox$ respectiv $[Oy$ sunt notate cu $\vec{i}$, $\vec{j}$.

Coordonate carteziene

Fie M un punct oarecare în planul reperului cartezian xOy. Fie x_M coordonata proiecţiei punctului M pe axa Ox, y_M coordonata proiecţiei punctului M pe axa Oy.
Definiţie. Numărul real x_M se numeşte **abscisa**, iar numărul y_M se numeşte **ordonata** punctului M şi se foloseşte scrierea $M(x_M,y_M)$. Perechea ordonată de numere reale (x_M,y_M) se numeşte **coordinatele** punctului M.

O altă definiţie (echivalentă) este:
Definiţie. Vectorul de poziţie $\overrightarrow{r_M}=\overrightarrow{OM}$ al punctului M se descompune în mod unic după vectorii $\vec{i}$ şi $\vec{j}$: $\overrightarrow{OM}=x_M\cdot\vec{i}+y_M\cdot\vec{j}$, $x_M,y_M\in\mathbb{R}$. Numerele x_M, y_M sunt **coordonatele** punctului M.
Notaţie. Formal, putem scrie $\overrightarrow{r_M}=(x_M,y_M)$.

Distanţa a două puncte

ţa dintre punctele $A(x_A,y_A)$ şi $B(x_B,y_B)$ este dată de formula

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

Problemă. *Să se determine perimetrul triunghiului AOB, unde $A(3{,}4)$, $B(12{,}5)$.*
S. $OA=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $OB=\sqrt{12^2+5^2}=13$, $AB=\sqrt{9^2+1^2}=\sqrt{82}$, deci $P_{AOB_\triangle}=18+\sqrt{82}$.

Problemă. *Să se determine valoarea numărului $m\in\mathbb{R}$astfel încât distanţa punctelor $A(2;m)$ şi $B(m;-2)$ să fie egală cu 4.*
S. $AB=\sqrt{(m-2)^2+(-2-m)^2}=4\Leftrightarrow 2m^2+8=16\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Operaţii cu vectori în coordonate carteziene

Fie $\overrightarrow{u}=(a_1,b_1)$ şi $\overrightarrow{v}=(a_2,b_2)$ doi vectori şi λ un numă real.
Proprietăţi. (*Egalitatea a doi vectori*) $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}\Leftrightarrow(a_1=a_2$ és $b_1=b_2)$.
Proprietăţi. (*Suma a doi vectori*) $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(a_1+a_2,b_1+b_2)$.
Proprietăţi. (*înmulţirea unui vector cu un număr real*) $\lambda\cdot\overrightarrow{u}=(\lambda\cdot a_1,\lambda\cdot b_1)$.
Proprietăţi. (*Produsul scalar a doi vectori*) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2\in\mathbb{R}$.
Proprietăţi. Lungimea vectorului $\overrightarrow{u}$ $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{a_1^2+b_1^2}$.
Consecinţă. Din definitţia produsului scalar

$$\cos(\widehat{u,v})=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

Consecinţă. Vectorul $\overrightarrow{u}$ este perpendicular pe vectorul $\overrightarrow{v}$-re dacă şi numai dacă $a_1a_2+b_1b_2=0$.
Teoremă. Vectorii $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ sunt paraleli dacă şi numai dacă $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$, $a_1,a_2,b_1,b_2\neq 0$ sau $a_1=a_2=0$ sau $b_1=b_2=0$.

Problemă. *Fie vectorii* $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$ *şi* $\vec{u}=6\vec{i}+2\vec{j}$. *Să se determine numerele reale* $p,r\in\mathbb{R}$ *astfel încât* $\vec{u}=p\vec{a}+r\vec{b}$ *!*

S. $\vec{u}=(1,1)$, $\vec{v}=(1,-1)$, $\vec{u}=(6,2)$. $p\vec{a}+r\vec{b}=p\cdot(1,1)+r\cdot(1,-1)=(p,p)+(r,-r)=(p+r,p-r)=(6,2)\Leftrightarrow$
$\begin{cases} p+r & =6 \\ p-r & =2 \end{cases}\Leftrightarrow p=4,r=2.$

Problemă. *Să se calculeze:* $(2\vec{i}+5\vec{j})\cdot(3\vec{i}-4\vec{j})$.

S. Din definiţia produsului scalar $\vec{i}\cdot\vec{i}=\|\vec{i}\|\cdot\|\vec{i}\|\cdot\cos(\widehat{\vec{i},\vec{i}})=1\cdot1\cdot\cos0=1$, $\vec{j}\cdot\vec{j}=1\cdot1\cdot\cos0=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=\|\vec{i}\|\cdot\|\vec{j}\|\cdot\cos(\widehat{\vec{i},\vec{j}})=1\cdot1\cdot\cos90^\circ=0$, deci $(2\vec{i}+5\vec{j})\cdot(3\vec{i}-4\vec{j})=6\vec{i}^{\,2}-8\vec{i}\,\overrightarrow{j+15\vec{j}\,\vec{i}-20\vec{j}}^{\,2}=$ $6-20=-14$.

Altă soluţie: formal, putem scrie
$(2\vec{i}+5\vec{j})\cdot(3\vec{i}-4\vec{j})=(2,5)\cdot(3,-4)=2\cdot3+5\cdot(-4)=-14.$

Problemă. *Să se determine valoarea parametrului* $m\in\mathbb{R}$ *pentru care vectorii* $\vec{u}=2\vec{i}-5\vec{j}$ *şi* $\vec{v}=4\vec{i}+(2m-1)\vec{j}$ *sunt perpendiculari!*

S. $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow2\cdot4+(-5)\cdot(2m-1)=0\Leftrightarrow$ $8-10m+5=0\Leftrightarrow m=\dfrac{13}{10}$.

Problemă. *Să se arate că unghiul vectorilor* $\vec{u}=4\vec{i}-5\vec{j}$ *şi* $v=3\vec{i}+7\vec{j}$ *este obtuz.*

S. $\vec{u}\cdot\vec{v}=(4,-5)\cdot(3,7)=12-35=-23<0$, deci cosinusul unghiului celor doi vectori este negativ $\Rightarrow$ unghiul este obtuz.

Problemă. *Să se determine valoarea parametrului* $a\in\mathbb{R}$ *pentru care vectorii* $\vec{u}=a\vec{i}+3\vec{j}$ *és* $\vec{v}=4\vec{i}+(a+4)\vec{j}$ *sunt paraleli.*

S. $\vec{u}\,||\,\vec{v}\Leftrightarrow\dfrac{a}{4}=\dfrac{3}{a+4}\Leftrightarrow a^2+4a-12=0\Leftrightarrow a_1=2,a_2=-6.$

Problemă. *În reperul cartezian xOy sunt date punctele $O(0{,}0)$, $A(2{,}1)$ şi $B(-2{,}1)$. Să se afle cosinusul unghiului format de vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$!*

S. $\overrightarrow{OA}=(2{,}1)$, $\overrightarrow{OB}=(-2{,}1)$, $\|\overrightarrow{OA}\|=\sqrt{5}$, $\|\overrightarrow{OB}\|=\sqrt{5}$; $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-3\Leftrightarrow$
$\|\overrightarrow{OA}\|\cdot\|\overrightarrow{OB}\|\cdot\cos(\widehat{AOB})=-3\Leftrightarrow\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos(\widehat{AOB})=-3\Leftrightarrow$
$\cos(\widehat{AOB})=-\dfrac{3}{5}$.

Fie $\overrightarrow{r_A}=(x_A,y_A)$, $\overrightarrow{r_B}=(x_B,y_B)$, $\overrightarrow{r_C}=(x_C,y_C)$.

Teoremă. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_A}=(x_B-x_A,y_B-y_A)$.

Teoremă. Dacă $M\in(AB)$ astfel încât $\overrightarrow{MA}=k\cdot\overrightarrow{MB}$, atunci

$$x_M=\frac{x_A-k\cdot x_B}{1-k} \text{ şi } y_M=\frac{y_A-k\cdot y_B}{1-k}.$$

Consecinţă. Coordonatele mijlocului M al segmentului $[AB]$:

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right).$$

Consecinţă. Coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right).$$

Problemă. *În triunghiul ABC fie G centrul de greutate. Ştiind că vectorul de poziţie al unctului A, B, G este $\overrightarrow{r_A}=4\overrightarrow{i}+7\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{r_B}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$ respectiv $\overrightarrow{r_G}=4\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}$, să se determine vectorul de poziţie al punctului C.*

S. $(4{,}4)=\left(\dfrac{4+2+x_C}{3},\dfrac{7-1+y_C}{3}\right)\Leftrightarrow x_C=6, y_C=6\Leftrightarrow C(6{,}6)$.

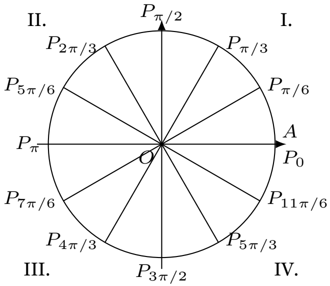
3. Trigonometrie

3.1. Elementele trigonometriei

Măsura unghiurilor în radiani

Definiţie. Raportul dintre semiperimetrul şi raza unui cerc este constant şi se notează prin π (valoarea aproximativă este $\pi \approx 3{,}1415$).
Definiţie. Măsura unui unghi la centrul unui cerc cuprinzând un arc de cerc a cărui lungime este egală cu raza cercului este de 1 **radian**.
Observaţie. Dacă α este măsura unui unghi în grade iar x_r este măsura unghiului în radiani, atunci este adevărată relaţia

$$\frac{\alpha}{x_r} = \frac{180}{\pi}.$$

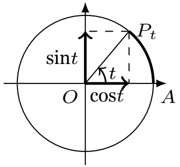


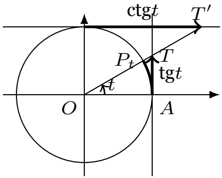
Cercul trigonometric

Definiţie. Fie xOy un reper cartezian. Cercul cu centrul în O şi cu raza egală cu 1 pe care este indicat **sensul trigonometric direct** (invers acelor ceasornicului) se numeşte **cercul trigonometric**.
Notaţie. Fie $t \in \mathbb{R}$ un număr real. Atunci există un unic punct P_t pe cercul trigonometric pentru care $m(\widehat{AOP_t})=t$.

Sinusul şi cosinusul

Fie t un număr real şi P_t punctul pentru care $m(\widehat{AOP_t})=t$.
Definiţie. Ordinata punctului P_t se numeşte **sinusul** numărului real t şi se notează prin $\sin t$.
Definiţie. Abscisa punctului P_t se numeşte **cosinusul** numărului real t şi se notează prin $\cos t$.





Tangenta şi cotangenta

Definiţie. Fie d_{tg} dreapta verticală de ecuaţie $x=1$ şi fie d_{ctg} dreapta orizontală de ecuaţie $y=1$.
Definiţie. Fie $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ şi T intersecţia dreptelor OP_t şi d_{tg}. Ordinata punctului T se numeşte **tangenta** numărului t şi se notează prin $\mathrm{tg}\, t$.
Definiţie. Fie $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ şi fie T' intersecţia dreptelor OP_t şi d_{ctg}. Abscisa punctului T' se numeşte **cotangenta** numărului real t şi se notează prin $\mathrm{ctg}\, t$.

Valori remarcabile

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\mid$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\mathrm{ctg}x$	$\mid$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mid$

Reducerea la primul cadran

$x \in C_2$	$x \in C_3$
$\sin x = \sin(\pi - x)$	$\sin x = -\sin(x - \pi)$
$\cos x = -\cos(\pi - x)$	$\cos x = -\cos(x - \pi)$
$\mathrm{tg}x = -\mathrm{tg}(\pi - x)$	$\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}(x - \pi)$
$\mathrm{ctg}x = -\mathrm{ctg}(\pi - x)$	$\mathrm{ctg}x = \mathrm{ctg}(x - \pi)$

$x \in C_4$
$\sin x = -\sin(2\pi - x)$
$\cos x = \cos(2\pi - x)$
$\mathrm{tg}x = -\mathrm{tg}(2\pi - x)$
$\mathrm{ctg}x = -\mathrm{ctg}(2\pi - x)$

Semnul funcţiilor trigonometrice

x	0	C_1	$\frac{\pi}{2}$	C_2	π	C_3	$\frac{3\pi}{2}$	C_4	2π
$\sin x$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0
$\cos x$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	1
$\mathrm{tg}x$	0	$+$	$+\mid-$	$-$	0	$+$	$+\mid-$	$-$	0
$\mathrm{ctg}x$	$\mid+$	$+$	0	$-$	$-\mid+$	$+$	0	$-$	$-\mid$

Monotonia funcţiilor trigonometrice

x	0	C_1	$\frac{\pi}{2}$	C_2	π	C_3	$\frac{3\pi}{2}$	C_4	2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	0
$\mathrm{ctg}\, x$	$\mid +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \mid$

Formule trigonometrice fundamentale

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ (*formula fundam.*)		$\mathrm{tg}\, x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\mathrm{ctg}\, x}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$	$\sin(-x)=-\sin x$	$\sin(x+2\pi)=\sin x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$	$\cos(-x)=\cos x$	$\cos(x+2\pi)=\cos x$
$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\mathrm{ctg}\, x$	$\mathrm{tg}(-x)=-\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{tg}(x+\pi)=\mathrm{tg}\, x$
$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{ctg}(-x)=-\mathrm{ctg}\, x$	$\mathrm{ctg}(x+\pi)=\mathrm{ctg}\, x$

2. Şiruri de numere reale

2.1. Şiruri reale

Definiţie. Se numeşte **şir real** o funcţie $f:\{k,k+1,k+2,\ldots\}\to\mathbb{R}$ ($k\in\mathbb{N}$). Şirul se notează prin (a_n), unde $a_n=f(n)$.

Definiţie. Şirul $(a_n)_{n\geq k}$ este

- **crescător**, dacă $a_{n+1}\geq a_n$, $\forall n\geq k$;
- **descrescător**, dacă $a_{n+1}\leq a_n$, $\forall n\geq k$;
- **mărginit**, dacă $\exists m,M\in\mathbb{R}$ astfel încât $m\leq a_n\leq M$, $\forall n\geq k$;
- **periodic**, dacă $\exists t\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a_{n+t}=a_n$, $\forall n\geq k$

Limita unui şir

Definiţie. Limita şirului $(a_n)_{n\geq k}$ este numărul α, dacă şi numai dacă în afara oricărei vecinătăţi V a lui α există cel mult un număr finit de termeni ai şirului:
limita şirului $(a_n)=\alpha \Leftrightarrow \forall V=V(\alpha)$, $\exists n_V\in\mathbb{N}$ astfel încât $a_n\in V$, $\forall n\geq n_V$.

Notaţie. Dacă limita şirului (a_n) este α, se scrie: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$.

Teoremă. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale, $\alpha\in\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $|a_n-\alpha|<\varepsilon$, $\forall n\geq n_0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $a_n>\varepsilon$, $\forall n\geq n_0$.

Limita unui şir - continuare

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $a_n < -\varepsilon,\ \forall n\geq n_0$.

Definiţie. Şirul (a_n) este **convergent**, dacă are limită finită. Un şir care nu este convergent este **divergent**.

Teoremă. Dacă un şir are limită, atunci limita şirului este unică.

Teoremă. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$.

Teoremă. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Teoremă. Dacă (a_n) este convergent, atunci (a_n) este mărginit.

Problemă. *Să se demonstreze că* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3}$.

S. Trebuie arătat că pentru orice $\varepsilon>0$ există n_0 astfel încât pentru orice $n\geq n_0$, $\left|a_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$, unde $a_n = \frac{2n+1}{3n-1}$.

$$\left|\frac{2n+1}{3n-1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{3(3n-1)} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{3\varepsilon} < 3n-1 \Leftrightarrow \frac{\frac{5}{3\varepsilon}+1}{3} < n,$$

deci se poate alege $n_0 = \left[\frac{5+3\varepsilon}{15}\right] + 1$ ($[A]$ este partea întreagă numărului A).

Problemă. *Să se demonstreze că* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty$.

S. Trebuie arătat că $\forall\varepsilon>0$, există n_0 astfel încât pentru orice $n\geq n_0$, $\frac{n^2}{n+1} > \varepsilon \Leftrightarrow n^2 - \varepsilon n - \varepsilon > 0 \Leftrightarrow n \in \left(-\infty, \frac{\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}}{2}\right) \cup \left(\frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}}{2}, \infty\right)$.

Fie $n_0 = \left[\frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}}{2}\right] + 1$, atunci $a_n > \varepsilon,\ \forall n \geq n_0$.

2.2. Operaţii cu şiruri reale

Operaţii cu şiruri care au limită

Definiţie. Fie şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **Suma şirurilor** este şirul $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $c_k=a_k+b_k, \forall k\in\mathbb{N}$;
- **Produsul şirurilor** este şirul $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $d_k=a_k\cdot b_k, \forall k\in\mathbb{N}$;
- **Câtul şirurilor** este şirul $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $e_k=\dfrac{a_k}{b_k}$, $\forall k\in\mathbb{N}$, dacă $b_k\neq 0, \forall k\in\mathbb{N}$.

Definiţie. Produsul şirului (a_n) cu numărul real λ este şirul (p_n), unde $p_k=\lambda\cdot a_k, \forall k\in\mathbb{N}$.

Teoremă. Dacă şirul (a_n) are limită, $\lambda\in\mathbb{R}^*$, atunci şirul $(\lambda\cdot a_n)$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda\cdot a_n)=\lambda\cdot\lim_{n\to\infty}a_n.$$

Teoremă. Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) au limite iar suma limitelor are sens, atunci şirul (a_n+b_n) are limită şi

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Teoremă. Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) au limite iar produsul limitelor are sens, atunci şirul $(a_n\cdot b_n)$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Teoremă. Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) au limite iar câtul limitelor are sens, atunci şirul $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

Nedeterminări: $\infty+(-\infty)$, $0\cdot\infty$, $0\cdot(-\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{0}{0}$.

Exemplu. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n^2+5n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n+\dfrac{3}{n}\right)}{n\left(3n+5+\dfrac{2}{n}\right)}=$$

$$=\mathrm{lim}_{n\to\infty}\frac{n\left(n+\dfrac{3}{n}\right)}{n\left(3n+5+\dfrac{2}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\dfrac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n+5+\dfrac{2}{n}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}n+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}3n+\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}}=\frac{1+0}{\infty+5+0}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Exemplu. $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{3n^2+n+1}-\sqrt{n^2+2n+3}=\text{“}\infty-\infty''=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\sqrt{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)=$$

$$\infty\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{1})=\infty.$$

Exemplu. $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+4n+3}-\sqrt{n^2+3n+1}=\text{“}\infty-\infty''=$$

$$=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2+3n+1})\ \sqrt{n^2+4n+3}-\sqrt{n^2+3n+1}}{1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n+3})^2-(\sqrt{n^2+3n+1})^2}{\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2+3n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2+3n+1}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}=\frac{1+\dfrac{2}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}.$$

Exemplu. $\lim\limits_{n\to\infty} 1+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{3}}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)=\dfrac{3}{2}.$

Exemplu. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^n}{7^n+11}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{11}{7^n}}=\dfrac{1}{1+0}=1.$

Problemă. *Să se calculeze:* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{k^2+k+1}.$

S. Pentru $k\in\mathbb{N}^*$ oarecare fie $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{k}=\alpha$, $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{k+1}=\beta$. Atunci

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}}{1+\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k+1}}=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=$$

$$=\operatorname{arctg}\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\alpha-\beta=\operatorname{arctg}\frac{1}{k}-\operatorname{arctg}\frac{1}{k+1},$$

$$\text{astfel } \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}\right)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}.$$

4. Funcţii continue

4.1. Continuitatea funcţiilor

Definiţie. Funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ este **continuă** în punctul $x_0\in D$, dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate $V(f(x_0))$ a lui $f(x_0)$ există o vecinătate $U(x_0)$ a punctului x_0 pentru care $\forall x\in D\cap V(x_0)\Rightarrow f(x)\in V(f(x_0))$.
Teoremă. Funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0\in D$ dacă şi numai dacă sau x_0 este un punct izolat al lui D sau $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
Teoremă. (*Criteriul lui Heine*) Funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0\in D$ dacă şi numai dacă pentru orice şir (x_n), $x_n\in D$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.
Teoremă. Funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ este continuă în punctul x_0 dacă şi numai dacă $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât $\forall x\in D$, $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.
Definiţie. Funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ este **continuă** pe mulţimea D dacă f este continuă în fiecare punct al lui D.
Teoremă. Funcţiile elementare sunt continue pe tot domeniul lor de definiţie.

Problemă. *Să se arate că funcţia*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2-2x & \text{, dacă } x\in\mathbb{Q} \\ x-2 & \text{, dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

nu este continuă în punctul $x_0=3$*!*
S. Fie (a_n) un şir cu termeni raţionali şi $a_n\to x_0$, iar (b_n) un şir de termeni iraţionali, $b_n\to x_0$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2-2a_n=3^2-2\cdot3=3$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} b_n-2=3-2=1$. Conform criteriului lui Heine f nu este continuă în $x_0=3$.

Continuitate laterală

Definiţie. Funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ este **continuă la stânga** în punctul $x_0\in D$, dacă x_0 este un punct izolat al mulţimii D sau $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=f(x_0)$.

Definiţie. Funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ este **continuă la dreapta** în punctul $x_0\in D$, dacă x_0 este punct izolat al mulţimii D sau $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=f(x_0)$.

Puncte de discontinuitate

Definiţie. Funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ este **discontinuă** în punctul $x_0\in D$ dacă şi numai dacă f nu este continuă în x_0.

Definiţie. Dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=l_b\in\mathbb{R}$, $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=l_j\in\mathbb{R}$, dar $l_b\neq l_j$, atunci f are **discontinuitate de prima speţă** în x_0.

Definiţie. Dacă f nu este continuă în punctul x_0 şi discontinuitatea nu este de prima speţă, atunci f are **discontinuitate de speţa a doua**.

Exemplu. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{, dacă } x<1\\ 0 & \text{, dacă } x=1\\ x^2 & \text{, dacă } x\in(1,2)\\ x+1 & \text{, dacă } x\in[2,3]\\ \dfrac{1}{x-3} & \text{, dacă } x\in(3,\infty)\end{cases}$$

f cont. pe $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,3)\cup(3,\infty)$.
$\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)=1$, $f(1)=0\Rightarrow f$ are discontinuitate în $x_0=1$.

$\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\searrow 2} f(x)=3 \Rightarrow f$ are discont. de prima speţă în $x_1=2$.
$\lim\limits_{x\nearrow 3} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\searrow 3} f(x)=+\infty \Rightarrow f$ are discont. de speţa a doua în $x_2=3$.

Problemă. *Să se verifice continuitatea funcţiei*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{, dacă } x<0 \\ 1 & \text{, dacă } x=0 \\ x^2-2x+2 & \text{, dacă } x>0 \end{cases}$$

în punctul $x_0=0$.

S. Verificăm dacă $\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow x_0} f(x)=f(x_0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0} \dfrac{\sin x}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\searrow x_0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0} x^2-2x+2=1 \\ f(x_0)=f(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow l_b(x_0)=l_j(x_0)=$$

$f(x_0) \Rightarrow f$ este continuă în punctul $x_0=0$.

Problemă. *Să se determine valoarea lui $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă pe $\mathbb{R}$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,*

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+x+a+1 & \text{, dacă } x<1 \\ x^2+ax-2 & \text{, dacă } x\geq 1 \end{cases}.$$

S. Funcţia f este continuă pe $(-\infty,1)$ şi pe $(1,\infty)$ (funcţiile elementare sunt continue), deci verificăm continuitatea în punctul $x_0=1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1} ax^2+x+a+1=2a+2 \\ \lim\limits_{x\searrow x_0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 1} x^2+ax-2=a-1 \\ f(x_0)=f(1)=a-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a+2=$$

$a-1 \Rightarrow a=-3$.