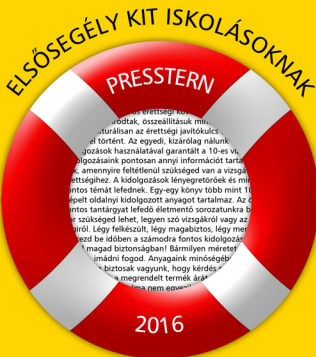


MATEMATIKA

ÁTMENŐ



A 2016-OS ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEINEK
MEGFELELŐ OKTATÁSI SEGÉDANYAG

© 2016 PRESSTERN SOLUTIONS

Tartalomjegyzék

1. Műveletek valós számokkal	1
1.1. Gyökök és hatványozás	1
1.1.1. Hatványozás.....	1
1.1.2. Gyökök	1
1.2. Azonosságok.....	2
1.3. Egyenlőtlenségek.....	3
2. Függvények	5
2.1. A függvény fogalma	5
2.2. Injektív, szürjektív függvények	6
2.3. Függvények összetétele	7
2.4. Inverz függvény	7
3. Elsőfokú egyenletek és egyenlőtlenségek	8
3.1. Elsőfokú egyenletek	8
3.2. Valós szám abszolút értéke	10
4. Másodfokú függvény	11
5. Komplex számok	13
5.1. Algebrai alak.....	13
5.2. Az i hatványai	14
5.3. A z konjugáltja.....	14
5.4. Komplex szám abszolút értéke	15
5.5. Trigonometriai alak	16
5.6. Moivre-képlet	17
5.7. Exponenciális alak.....	17
5.8. Binom egyenlet.....	18
6. Haladványok.....	18
6.1. Számtani sorozatok.....	18
6.2. Mértani sorozatok	19
6.2.1. Egy alkalmazás	20

7. Logaritmusok.....	21
7.1. Alap logaritmikus és exponenciális egyenletek	23
7.2. Alap logaritmikus és exponenciális egyenlőtlenségek.....	24
8. Mértan.....	24
8.1. Vektorok	24
8.1.1. Nevezetes helyzetvektorokkal kapcsolatos tételek	30
8.2. Analitikus mértan térben, síkban.....	34
8.2.1. Egy pont és két nem párhuzamos irány által meghatározott sík egyenlete. 35	
8.2.2. Három nem kollineáris pont által meghatározott sík egyenlete .36	
8.2.3. A sík tengelymetszetes egyenlete.....	37
8.2.4. A sík általános egyenlete	38
8.2.5. A koordináta-rendszerhez viszonyítva sajátos helyzetű síkok egyenletei .. 38	
8.3. Egyenesek egyenletei	39
8.3.1. Két különböző pont által meghatározott egyenes egyenlete ... 41	
8.3.2. Az egyenes általános egyenlete	41
8.3.3. Síkbeli egyenesek egyenletei.....	41
8.3.4. Két különböző pont által meghatározott egyenes egyenlete ... 42	
8.3.5. Két térbeli egyenes szöge	43
8.4. Pont távolsága egyenestől (síkban)	44
8.4.1. Szögfelezők egyenletei (síkban).....	44
8.5. Pont távolsága egyenestől (térben).....	45
8.6. A kör	46
8.7. Az ellipszis	46
9. A hiperbola	47
9.1. Parabola	48
9.2. Skaláris szorzat további alkalmazásai	49
10. A matematikai indukció módszere.....	50
10.1. A Peano-féle axiómák	50
10.2. A matematikai indukció módszere	51
10.3. A matematikai indukció módszerének egy változata.....	51
11. Kombinatorika	52
11.1. Permutációk	52

11.2. Variációk.....	52
11.3. Kombinációk	53
11.4. Newton binomiális képlete.....	54
11.5. Azonos hatványösszegek.....	55
12. Polinomok	56
12.1. Egy polinom algebrai alakja.....	56
12.2. Polinomok oszthatósága	56
12.3. Irreducibilis polinomok	57
12.4. Polinomok gyökei.....	58
12.5. Algebrai egyenletek.....	59
12.6. Polinomok melyek együtthatói R, Q, Z -ből vannak.....	59
13. Permutációk, mátrixok és determinánsok.....	60
13.1. Permutációk	60
13.2. Mátrixok	61
13.3. Műveletek mátrixokkal.....	62
13.4. Determinánsok.....	64
13.5. Mátrix inverse.....	65
13.5.1. A mátrix nyoma, $\text{Tr}(A)$	66
13.6. További képletek	66
14. Lineáris rendszerek.....	68
14.1. Jelölések.....	68
14.2. Összeférhetőség.....	68
15. Trigonometria.....	69
15.1. Trigonometriai képletek	69
15.2. Trigonometria alkalmazása a mértanban.....	72
16. Matematikai analízis	75
16.1. Rekurziók.....	75
16.1.1. Elsőrendű rekurziók.....	75
16.1.2. Másodrendű rekurziók.....	75
16.2. Sorozatok határértéke	75
16.2.1. Általános határértékek, konvergencia kritériumok	77
16.3. Függvényhatárértékek	81
16.3.1. Műveletek függvényhatárértékekkel	82
16.4. Alaphatárértékek.....	82

16.5. Függvények folytonossága.....	84
16.5.1. Folytonosságra vonatkozó tételek.....	85
16.6. Deriválható függvények.....	87
16.6.1. Derivált értelmezése egy pontban.....	87
16.6.2. Deriválási szabályok.....	88
16.6.3. Néhány függvény deriváltja.....	89
16.6.4. Összetett függvény deriváltja.....	90
16.6.5. Magasabbrendű deriváltak.....	91
16.6.6. Deriválható függvények tulajdonságai.....	92
16.7. Integrálok.....	93
16.7.1. Határozatlan integrálok.....	93
17. Primitiválhatóság.....	93
17.1. Racionális függvények primitívje.....	93
17.2. Integrálok amelyek tartalmazzák az $r = (x^2 + a^2)^{1/2}$	96
17.3. Integrálok amelyek tartalmazzák az $s = (x^2 - a^2)^{1/2}$	98
17.4. Integrálok amelyek tartalmazzák a $t = (a^2 - x^2)^{1/2}$	99
17.5. Integrálok amelyek tartalmazzák az $R = (ax^2 + bx + c)^{1/2}$	100
17.6. Trigonometrikus integrálok, amelyek csak a $\sin-t$ tartalmazzák...	101
17.7. Trigonometrikus integrálok, amelyek csak a $\cos-t$ tartalmazzák..	102
17.8. Trigonometrikus integrálok, amelyek csak a $\tan-t$ tartalmazzák...	103
17.9. Trigonometrikus integrálok, amelyek tartalmazzák a $\sin-t$ és $\cos-t$..	103
17.10. Logaritmikus integrálok.....	104
17.10.1. A határozott integrál tulajdonságai.....	105
17.10.2. Integrálok additivitása intervallumokon.....	106
17.10.3. Fundamentális tétel (Alaptétel).....	106
17.10.4. Egyenlőtlenségek.....	107
17.11. Más tételek.....	110
17.11.1. Primitiválható függvények.....	110
17.11.2. Integrálható függvények.....	111
18. Algebrai struktúrák.....	111
18.1. Csoportok.....	111
18.1.1. Tulajdonságok és nevezetes tételek.....	112
18.2. Monoidok.....	114
18.3. Gyűrűk.....	115
18.4. Testek.....	117
18.5. Vektorterek.....	118

1 Műveletek valós számokkal

1.1 Gyökök és hatványozás

1.1.1 Hatványozás

1. $a^{m \cdot n} = a^m \cdot a^n$
2. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
3. $a^m : a^n = a^{m-n}$
4. $a^m : b^m = (a : b)^m$
5. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
6. $(a^m)^n = a^{mn}$.

A valós számok hatványai kiterjeszthetők racionális, irracionális, illetve valós hatványokkal is sorok segítségével. Ezek a hatványok is rendelkeznek azokkal a tulajdonságokkal amivel a természetes kitevőjű hatványok.

1.1.2 Gyökök

Az alábbi képletekben értelemszerűen az $n, m \geq 2$, valamint az a, b, c számok olyan valós számok, amelyekre az adott kifejezéseknek van értelme:

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, a > 0;$
2. $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-\frac{1}{n}};$
3. $(\sqrt[n]{a})^n = a;$
4. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$
5. $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)^n = \frac{1}{a};$

6. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc};$
7. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$
8. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}};$
9. $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^{n-m}};$
10. $\sqrt[n]{a^{nm}} = a^m;$
11. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}};$
12. $\sqrt[mn]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^p};$
13. $\sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[nm]{a^{pn} \cdot b^{qm}};$
14. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a};$
15. $\sqrt{a^2} = |a|;$
16. $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a};$
17. $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ ahol a $c^2 = a^2 - b$
egyenlőségből határozzuk meg a c értékét.

Tekintsük a következő példát a 17 képletre. Hozzuk egyszerűbb alakra $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$ kifejezést. Ebben az esetben nehéz dolgunk van és nem igazán tudunk vele mit kezdeni, ezért folyamodunk a fenti képlethez: $c^2 = 3^2 - 8 = 1$, tehát

$$\sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} + 1.$$

1.2 Azonosságok

Bármely $x, y, z, t, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén:

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
2. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (ay + bx)^2$

8.2.1 Egy pont és két nem párhuzamos irány által meghatározott sík egyenlete

Tekintjük az $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ rögzített pontot és a

$$\vec{d}_1(p_1, q_1, r_1)$$

$$\vec{d}_2(p_2, q_2, r_2) \in \mathcal{V}$$

egymással nem párhuzamos vektorokat.

Jelölje a és b a \vec{d}_1 illetve a \vec{d}_2 vektorok tartóegyenseit. Ekkor létezik egy és csakis egy a' egyenes úgy, hogy $a \parallel a'$, $A \in a'$ és létezik egy és csakis egy b' egyenes úgy, hogy $b \parallel b'$, $A \in b'$. Ekkor $\text{dir } a' = \text{dir } \vec{d}_1$ és $\text{dir } b' = \text{dir } \vec{d}_2$. Mivel $a' \cap b' = \{A\}$ kapjuk, hogy az $(a', b') = \alpha$ sík jól meghatározott. Tehát egy sík egyértelműen meghatározott egy pont és két nem párhuzamos irány által.

Egy sík egyenlete meghatározott, ha bármely M pontjának ismerjük a helyzetvektorát. Legyen M egy tetszőleges pont az A pont valamint a \vec{d}_1, \vec{d}_2 vektorok által meghatározott α síkban. Felírható, hogy $\vec{r}_M = \vec{r}_A + \overrightarrow{AM}$. Mivel az \overrightarrow{AM} vektor koplánáris a \vec{d}_1, \vec{d}_2 vektorokkal, léteznek a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ valós számok úgy, hogy

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \vec{d}_1 + \mu \cdot \vec{d}_2.$$

Tehát a sík vektoriális egyenlete:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda \vec{d}_1 + \mu \vec{d}_2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Az alábbi egyenletrendszert tekintve

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot p_1 + \mu \cdot p_2 \\ y = y_0 + \lambda \cdot q_1 + \mu \cdot q_2 \\ z = z_0 + \lambda \cdot r_1 + \mu \cdot r_2, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

megkapjuk sík paraméteres egyenleteit.

$$\begin{cases} \lambda \cdot p_1 + \mu \cdot p_2 = x - x_0 \\ \lambda \cdot q_1 + \mu \cdot q_2 = y - y_0 \\ \lambda \cdot r_1 + \mu \cdot r_2 = z - z_0 \end{cases} .$$

Ennek az egyenletrendszernek a λ és μ ismeretlenekkel akkor van megoldása, ha:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & x - x_0 \\ q_1 & q_2 & y - y_0 \\ r_1 & r_2 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

vagy átírva

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & p_2 & r_1 \\ q_1 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Az így kapott egyenletet a sík algebrai vagy kanonikus egyenletének nevezzük. Ha a determinánst az első sora szerint kifejtjük, akkor az

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (14)$$

egyenletet kapjuk, ahol

$$A = \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}$$

8.2.2 Három nem kollineáris pont által meghatározott sík egyenlete

Legyen $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ egy Descartes koordináta-rendszer és

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3) \in \mathcal{S}$$

három nem kollineáris pont. Ekkor az M_1, M_2, M_3 pontok

egyértelműen meghatároznak egy $(M_1 M_2 M_3) = \alpha$ síkot. Hasonlóan, mint a fentiekben, kapjuk, hogy

$$\begin{cases} x = (1 - \lambda - \mu)x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 \\ y = (1 - \lambda - \mu)y_1 + \lambda y_2 + \mu y_3 \\ z = (1 - \lambda - \mu)z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3, \end{cases}$$

ahol $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ amelyet a sík parametrikus egyenletének nevezünk.

Ha átrendezzük a fenti rendszert kapunk λ, μ -ben egy két ismeretlenes egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) + \mu(x_3 - x_1) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1) + \mu(y_3 - y_1) \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1) + \mu(z_3 - z_1) \end{cases}$$

Rouché tételből következik, hogy az egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van megoldása, ha:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Ezt az egyenletet nevezzük a három nem kollineáris ponton áthaladó sík algebrai egyenletének. Ez az egyenlet még átírható a következő alakba:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

8.2.3 A sík tengelymetszetes egyenlete

Legyenek az $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ és a $C(0, 0, c)$ pontok a térben. Ekkor az (ABC) sík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Kiszámolva a determinánst és átrendezve az egyenletet megkapjuk a sík tengelymetszetes egyenletét :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (17)$$

8.2.4 A sík általános egyenlete

Tétel 8.5. *A sík általános egyenlete*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (18)$$

alakú, ahol $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\text{rang}[A, B, C] = 1$.

Mivel $\text{rang}[A, B, C] = 1$ következik, hogy az $Ax + By + Cz + D = 0$ egyenletnek létezik legalább egy

$$(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$$

megoldása, vagyis

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (19)$$

Az $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + D = 0$, amely egy síkot ábrázol, amely áthalad az (x_0, y_0, z_0) ponton. Adott ponton átmenő adott normálvektorú sík egyenlete.

8.2.5 A koordináta-rendszerhez viszonyítva sajátos helyzetű síkok egyenletei

Azt vizsgáljuk, hogy amennyiben a sík

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

8.5 Pont távolsága egyenestől (térben)

Legyen $\mathcal{R}\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ egy descartes féle koordináta-rendszer, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ egy rögzített pont és

$$e : \frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$$

egy egyenes. Legyen $pr_e(M_0) = M$. Ekkor az M_0 pont e egyenestől való távolságán az alábbi számot értjük

$$d(M_0, e) = \|\overrightarrow{M_0M}\| .$$

Legyen $M_1(x_1, y_1, z_1)$ és A két pont az e egyenesről úgy, hogy $\overrightarrow{M_1A} = \vec{d}(p, q, r)$, ahol \vec{d} vektorral az e egyenes irányvektorát jelöltük. Ekkor az M_1M_0A háromszög területét kétféleképpen felírva a következő egyenlőséghez jutunk:

$$\begin{aligned}\sigma(M_0M_1A) &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{M_0M}\| \cdot \|\overrightarrow{M_1A}\| = \\ &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{d}\| .\end{aligned}$$

Ha ebből a képletből kifejezzük az $\|\overrightarrow{M_0M}\| = d(M_0, e)$ számot kapjuk, hogy:

$$d(M_0, e) = \frac{\|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}, \quad (34)$$

8.6 A kör

Legyen M_0 egy rögzített pont a \mathcal{P} síkban és legyen $r > 0$ egy rögzített szám.

Értelmezés 8.11. Az M_0 középpontú és r sugarú C kör azon M pontok mértani helye a síkból, amelyeknek az M_0 ponttól vett távolsága állandó és egyenlő r -rel, vagyis

$$C(M_0, r) = \{M \in \mathcal{P} : |MM_0| = r.\} \quad (35)$$

Tétel 8.7. Az $M(x, y)$ pont akkor és csakis akkor van az $M_0(x_0, y_0)$ középpontú, r sugarú körön, ha

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (36)$$

Tétel 8.8. Az $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ egyenletű kör $M_1(x_1, y_1)$ pontjában szerkesztett érintő egyenlete:

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = r^2,$$

amelyet még a kör **duplázott egyenletének** is nevezünk az $M_1(x_1, y_1)$ pontban.

8.7 Az ellipszis

Értelmezés 8.12. Azon pontok mértani helyét a síkból, amelyeknek két rögzített ponttól mért távolságuk összege állandó, **ellipszisnek** nevezük.

Legyen $c > 0$ és F, F' két rögzített pont a síkban úgy, hogy $|FF'| = 2c$ és legyen $a > c$. A sík azon M pontjainak mértani helyét, amelyre $|MF| + |MF'| = 2a$, ellipszisnek nevezük:

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} : |MF| + |MF'| = 2a\}.$$

vagy

$$\lim_{h \rightarrow 0, x_0+h \in A} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Ekkor értelmezhető

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

és

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ekkor $f'(x_0)$ létezik ha

$$f'_s(x_0) = f'_d(x_0),$$

és

$$f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0).$$

16.6.2 Deriválási szabályok

Tétel 16.24. Legyenek $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ f, g deriválhatóak az $x \in A$ pontban. Ekkor

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
2. $(cf)'(x) = cf'(x)$
3. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
4. Ha $g(x) \neq 0$,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'(x) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

5. Ha $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, f deriválható az $x_0 \in I$ -ben és g deriválható $y_0 = f(x_0)$, akkor

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$$

6. Ha $f : I \rightarrow J$ folytonos, bijektív, deriválható x_0 pontban úgy, hogy $f'(x_0) \neq 0$, akkor

$$f^{-1} : J \rightarrow I$$

deriválható az y_0 pontban, $y_0 = f(x_0)$ és

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

16.6.3 Néhány függvény deriváltja

- 1) $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$;
- 2) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$;
- 3) $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$, $x > 0 \Rightarrow f'(x) = rx^{r-1}$;
- 4) $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
- 5) $f(x) = \ln(x)$, $x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$;
- 6) $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$, $x > 0 \Rightarrow f'(x) = a^x \ln(a)$;
- 7) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$;
- 8) $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$;

$$9) f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x);$$

$$10) f(x) = \tan(x), x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)};$$

$$11) f(x) = \cot(x), x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)};$$

$$12) f(x) = \arcsin(x), x \in [0, 1] \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$13) f(x) = \arccos(x), x \in [0, 1] \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$14) f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

16.6.4 Összetett függvény deriváltja

$$1) f(u) = c \Rightarrow f'(u) = 0;$$

$$2) f(u) = u^n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow f'(u) = nu^{n-1} \cdot u';$$

$$3) f(u) = u^r, r \in \mathbb{R}, u > 0 \Rightarrow f'(u) = ru^{r-1} \cdot u';$$

$$4) f(u) = \sqrt{u}, u > 0 \Rightarrow f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$$

$$5) f(u) = \ln(u), u > 0 \Rightarrow f'(u) = \frac{1}{u} \cdot u';$$

$$6) f(u) = a^u, a \neq 1, a > 0, u > 0 \Rightarrow f'(u) = a^u \ln(a) \cdot u';$$

$$7) f(u) = e^u \Rightarrow f'(u) = e^u \cdot u';$$

$$8) f(u) = \sin(u) \Rightarrow f'(u) = \cos(u) \cdot u';$$

$$9) f(u) = \cos(u) \Rightarrow f'(u) = -\sin(u) \cdot u';$$

$$10) f(u) = \tan(u), \cos(u) \neq 0, \Rightarrow \\ f'(u) = \frac{1}{\cos^2(u)} \cdot u';$$

$$11) f(u) = \cot(u), \sin(u) \neq 0 \Rightarrow \\ f'(u) = \frac{-1}{\sin^2(u)} \cdot u';$$

$$12) f(u) = \arcsin(u), u \in [0, 1] \Rightarrow \\ f'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$13) f(u) = \arccos(u), u \in [0, 1] \Rightarrow \\ f'(u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$14) f(u) = \arctan(u)$$

$$f'(u) = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

16.6.5 Magasabb rendű deriváltak

$$1) f(x) = x^m, m \in \mathbb{N}, m \geq n \Rightarrow f^{(n)}(x)$$

$$= m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n};$$

$$2) f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x;$$

$$3) f(x) = a^x, f^{(n)}(x) = (\ln(a))^n a^x;$$

$$4) f(x) = \ln(x) \Rightarrow$$