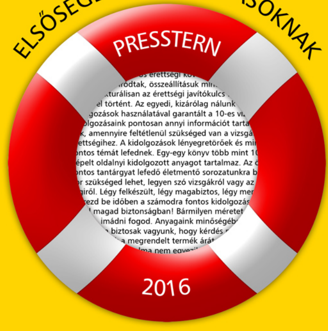
# MATEMATIKA

ÁTMENŐ

ELSŐSEGÉLY KIT ISKOLÁSOKNAK




A 2016-OS ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEINEK
MEGFELELŐ OKTATÁSI SEGÉDANYAG

# Tartalomjegyzék

# 1 Műveletek valós számokkal

## 1.1 Gyökök és hatványozás

### 1.1.1 Hatványozás

1. $a^{m\cdot n} = a^m \cdot a^n$
2. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
3. $a^m : a^n = a^{m-n}$
4. $a^m : b^m = (a : b)^m$
5. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
6. $(a^m)^n = a^{mn}$.

A valós számok hatványai kiterjeszthetőek racionális, irracionális, illetve valós hatványokkál is sorok segítségével. Ezek a hatványok is rendelkeznek azokkal a tulajdonságokkal amivel a természetes kitevöjű hayványok.

### 1.1.2 Gyökök

Az alábbi képletekben értelemszerűen az $n, m \geq 2$, valamint az $a, b, c$ számok olyan valós számok, amelyekre az adott kifejezéseknek van értelme:

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, a > 0;$
2. $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-\frac{1}{n}};$
3. $(\sqrt[n]{a})^n = a;$
4. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$
5. $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)^n = \frac{1}{a};$

6. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{abc}$;
7. $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$;
8. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{a}=\sqrt[nm]{a^{n+m}}$;
9. $\sqrt[m]{a}:\sqrt[n]{a}=\sqrt[nm]{a^{n-m}}$;
10. $\sqrt[n]{a^{nm}}=a^m$;
11. $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$;
12. $\sqrt[mn]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^p}$;
13. $\sqrt[m]{a^p}\cdot\sqrt[n]{b^q}=\sqrt[nm]{a^{pn}\cdot b^{qm}}$;
14. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nm]{a}$;
15. $\sqrt{a^2}=|a|$;
16. $\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$;
17. $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$ ahol a $c^2=a^2-b$ egynlőségből határozzuk meg a $c$ értékét.

Tekintsük a következő példát a 17 képletre. Hozzuk egyszerűbb alakra $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ kifejezést. Ebben az esetben nehéz dolgunk van és nem igazán tudunk vele mit kezdeni, ezért folyamodunk a fenti képlethez: $c^2=3^2-8=1$, tehát

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+1}{2}}+\sqrt{\frac{3-1}{2}}=\sqrt{2}+1.$$

## 1.2 Azonosságok

Bármely $x,y,z,t,a,b,c,d\in\mathbb{R}$ és $n\in\mathbb{N}$ esetén:

1. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
2. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(ay+bx)^2$

### 8.2.1 Egy pont és két nem párhuzamos irány által meghatározott sík egyenlete

Tekintjük az $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ rögzített pontot és a

$$\vec{d_1}(p_1, q_1, r_1)$$

$$\vec{d_2}(p_2, q_2, r_2) \in \mathcal{V}$$

egymással nem párhuzamos vektorokat.

Jelölje $a$ és $b$ a $\vec{d_1}$ illetve a $\vec{d_2}$vektorok tartóegyeneseit. Ekkor létezik egy és csakis egy $a'$ egyenes úgy, hogy $a \parallel a'$, $A \in a'$ és létezik egy és csakis egy $b'$ egyenes úgy, hogy $b \parallel b', A \in b'$. Ekkor $dir\, a' = dir\, \vec{d_1}$ és $dir\, b' = dir\, \vec{d_2}$. Mivel $a' \cap b' = \{A\}$ kapjuk, hogy az $(a', b') = \alpha$ sík jól meghatározott. Tehát egy sík egyértelműen meghatározott egy pont és két nem párhuzamos irány által.

Egy sík egyenlete meghatározott, ha bármely $M$ pontjának ismerjük a helyzetvektorát. Legyen $M$ egy tetszőleges pont az $A$ pont valamint a $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$ vektorok által meghatározott $\alpha$ síkban. Felírható, hogy $\vec{r}_M = \vec{r}_A + \overrightarrow{AM}$. Mivel az $\overrightarrow{AM}$ vektor koplanáris a $\vec{d_1}, \vec{d_2}$ vektorokkal, léteznek a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ valós számok úgy, hogy

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \vec{d_1} + \mu \cdot \vec{d_2}.$$

Tehát a sík vektoriális egyenlete:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \lambda \vec{d_1} + \mu \vec{d_2}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Az alábbi egyenletrendszert tekintve

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot p_1 + \mu \cdot p_2 \\ y = y_0 + \lambda \cdot q_1 + \mu \cdot q_2 \\ z = z_0 + \lambda \cdot r_1 + \mu \cdot r_2, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$$

megkapjuk sík paraméteres egyenleteit.

$$\begin{cases} \lambda \cdot p_1 + \mu \cdot p_2 = x - x_0 \\ \lambda \cdot q_1 + \mu \cdot q_2 = y - y_0 \\ \lambda \cdot r_1 + \mu \cdot r_2 = z - z_0 \end{cases} .$$

Ennek az egyenletrendszernek a $\lambda$ és $\mu$ ismeretlenekkel akkor van megoldása, ha:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & x - x_0 \\ q_1 & q_2 & y - y_0 \\ r_1 & r_2 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

vagy átírva

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Az így kapott egyenletet a sík algebrai vagy kanonikus egyenletének nevezzük. Ha a determinánst az első sora szerint kifejtjük, akkor az

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{14}$$

egyenletet kapjuk, ahol

$$A = \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}$$

### 8.2.2 Három nem kollineáris pont által meghatározott sík egyenlete

Legyen $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ egy Descartes koordinátarendszer és

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3) \in \mathcal{S}$$

három nem kollineáris pont. Ekkor az $M_1, M_2, M_3$ pontok egyértelműen meghatároznak egy $(M_1M_2M_3) = \alpha$ síkot. Hasonlóan, mint a fentiekben, kapjuk, hogy

$$\begin{cases} x = (1-\lambda-\mu)x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 \\ y = (1-\lambda-\mu)y_1 + \lambda y_2 + \mu y_3 \\ z = (1-\lambda-\mu)z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3, \end{cases}$$

ahol $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ amelyet a sík parametrikus egyenletének nevezünk.

Ha átrendezzük a fenti rendszert kapunk $\lambda, \mu$ -ben egy két ismeretlenes egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) + \mu(x_3 - x_1) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1) + \mu(y_3 - y_1) \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1) + \mu(z_3 - z_1) \end{cases}$$

Rouché tételből következik, hogy az egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van megoldása, ha:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Ezt az egyenletet nevezzük a három nem kollineáris ponton áthaladó sík algebrai egyenletének. Ez az egyenlet még átírható a következő alakba:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

### 8.2.3 A sík tengelymetszetes egyenlete

Legyenek az $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ és a
$C(0,0,c)$ pontok a térben. Ekkor az $(ABC)$ sík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Kiszámolva a determinánst és átrendezve az egyenletet megkapjuk a sík tengelymetszetes egyenletét :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{17}$$

### 8.2.4 A sík általános egyenlete

**Tétel 8.5.** *A sík általános egyenlete*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{18}$$

*alakú, ahol* $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $rang[A, B, C] = 1$.

Mivel $rang[A, B, C] = 1$ következik, hogy az $Ax + By + Cz + D = 0$ egyenletnek létezik legalább egy

$$(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$$

megoldása, vagyis

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{19}$$

Az
$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + D = 0$,
amely egy síkot ábrázol, amely áthalad az $(x_0, y_0, z_0)$ ponton. Adott ponton átmenő adott normálvektorú sík egyenlete.

### 8.2.5 A koordináta-rendszerhez viszonyítva sajátos helyzetű síkok egyenletei

Azt vizsgáljuk, hogy amennyiben a sík

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

## 8.5 Pont távolsága egyenestől (térben)

Legyen $\mathcal{R}\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ egy descartes féle koordináta-rendszer, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ egy rögzített pont és

$$e:\frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$$

egy egyenes. Legyen $pr_e(M_0)=M$. Ekkor az $M_0$ pont $e$ egyenestől való távolságán az alábbi számot értjük

$$d(M_0,e)=\parallel\overrightarrow{M_0M}\parallel.$$

Legyen $M_1(x_1,y_1,z_1)$ és $A$ két pont az $e$ egyenesről úgy, hogy $\overrightarrow{M_1A}=\vec{d}(p,q,r)$, ahol $\vec{d}$ vektorral az $e$ egyenes irányvektorát jelöltük. Ekkor az $M_1M_0A$ háromszög területét kétféleképpen felírva a következő egyenlőséghez jutunk:

$$\sigma(M_0M_1A)=\frac{1}{2}\parallel\overrightarrow{M_0M}\parallel\cdot\parallel\overrightarrow{M_1A}\parallel=$$

$$=\frac{1}{2}\parallel\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{d}\parallel.$$

Ha ebből a képletből kifejezzük az $\parallel\overrightarrow{M_0M}\parallel=d(M_0,e)$ számot kapjuk, hogy:

$$d(M_0,e)=\frac{\parallel\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{d}\parallel}{\parallel\vec{d}\parallel},\qquad(34)$$

## 8.6 A kör

Legyen $M_0$ egy rögzített pont a $\mathcal{P}$ síkban és legyen $r > 0$ egy rögzített szám.

**Értelmezés 8.11.** *Az $M_0$ középpontú és $r$ sugarú $\mathcal{C}$ **kör** azon $M$ pontok mértani helye a síkból, amelyeknek az $M_0$ ponttól vett távolsága állandó és egyenlő $r$-rel, vagyis*

$$\mathcal{C}(M_0, r) = \{M \in \mathcal{P} : |MM_0| = r.\} \qquad (35)$$

**Tétel 8.7.** *Az $M(x, y)$ pont akkor és csakis akkor van az $M_0(x_0, y_0)$ középpontú, $r$ sugarú körön, ha*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \qquad (36)$$

**Tétel 8.8.** *Az $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ egyenletű kör $M_1(x_1, y_1)$ pontjában szerkesztett **érintő egyenlete**:*

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = r^2,$$

*amelyet még a kör **duplázott egyenleté**nek is nevezünk az $M_1(x_1, y_1)$ pontban.*

## 8.7 Az ellipszis

**Értelmezés 8.12.** *Azon pontok mértani helyét a síkból, amelyeknek két rögzített ponttól mért távolságuk összege állandó, **ellipszis**nek nevezzük.*

Legyen $c > 0$ és $F, F'$ két rögzített pont a síkban úgy, hogy $|FF'| = 2c$ és legyen $a > c$. A sík azon $M$ pontjainak mértani helyét, amelyre $|MF| + |MF'| = 2a$, ellipszisnek nevezzük:

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} : |MF| + |MF'| = 2a\}.$$

vagy

$$\lim_{h \to 0, x_0 + h \in A} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ekkor értelmezhető

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

és

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ekkor $f'(x_0)$ létezik ha

$$f'_s(x_0) = f'_d(x_0),$$

és

$$f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0).$$

### 16.6.2 Deriválási szabályok

**Tétel 16.24.** *Legyenek $f, g : A \to \mathbb{R}$ $f, g$ deriválhatóak az $x \in A$ pontban. Ekkor*

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
2. $(cf)'(x) = cf'(x)$
3. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
4. *Ha* $g(x) \neq 0$,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'(x)$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

5. *Ha $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, $f$ deriválható az $x_0 \in I$-ben és $g$ deriválható $y_0 = f(x_0)$, akkor*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$$

6. *Ha $f : I \to J$ folytonos, bijektív, deriválható $x_0$ pontban úgy, hogy $f'(x_0) \neq 0$, akkor*

$$f^{-1} : J \to I$$

*deriválható az $y_0$ pontban, $y_0 = f(x_0)$ és*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

.

### 16.6.3 Néhány függvény deriváltja

1) $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0;$

2) $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1};$

3) $f(x) = x^r, r \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow f'(x) = rx^{r-1};$

4) $f(x) = \sqrt{x}, x > 0 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}};$

5) $f(x) = \ln(x), x > 0 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x};$

6) $f(x) = a^x, a \neq 1, a > 0, x > 0 \Rightarrow f'(x) = a^x \ln(a);$

7) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x;$

8) $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x);$

9) $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x);$

10) $f(x) = \tan(x), x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)};$

11) $f(x) = \cot(x), x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2(x)};$

12) $f(x) = \arcsin(x), x \in [0,1] \Rightarrow$
$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

13) $f(x) = \arccos(x), x \in [0,1] \Rightarrow$
$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$

14) $f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}.$

### 16.6.4 Összetett függvény deriváltja

1) $f(u) = c \Rightarrow f'(u) = 0;$

2) $f(u) = u^n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow f'(u) = nu^{n-1} \cdot u';$

3) $f(u) = u^r, r \in \mathbb{R}, u > 0 \Rightarrow f'(u) = ru^{r-1} \cdot u';$

4) $f(u) = \sqrt{u}, u > 0 \Rightarrow f'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$

5) $f(u) = \ln(u), u > 0 \Rightarrow f'(u) = \dfrac{1}{u} \cdot u'$

6) $f(u) = a^u, a \neq 1, a > 0, u > 0 \Rightarrow f'(u) = a^u \ln(a) \cdot u';$

7) $f(u) = e^u \Rightarrow f'(u) = e^u \cdot u';$

8) $f(u) = \sin(u) \Rightarrow f'(u) = \cos(u) \cdot u'$;

9) $f(u) = \cos(u) \Rightarrow f'(u) = -\sin(u) \cdot u'$;

10) $f(u) = \tan(u), \cos(u) \neq 0, \Rightarrow$
$f'(u) = \dfrac{1}{\cos^2(u)} \cdot u'$;

11) $f(u) = \cot(u), \sin(u) \neq 0 \Rightarrow$
$f'(u) = \dfrac{-1}{\sin^2(u)} \cdot u'$;

12) $f(u) = \arcsin(u), u \in [0, 1] \Rightarrow$
$f'(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$;

13) $f(u) = \arccos(u), u \in [0, 1] \Rightarrow$
$f'(u) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$;

14) $f(u) = \arctan(u)$

$$f'(u) = \frac{1}{1 + u^2} \cdot u'.$$

### 16.6.5 Magasabb rendű deriváltak

1) $f(x) = x^m, m \in \mathbb{N}, m \geq n \Rightarrow f^{(n)}(x)$

$$= m(m-1)(m-2)...(m-n+1)x^{m-n};$$

2) $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x$;

3) $f(x) = a^x, f^{(n)}(x) = (\ln(a))^n a^x$;

4) $f(x) = \ln(x) \Rightarrow$