MATEMATIKA

GEOMETRIA ÉS MATEMATIKAI ANALÍZIS

ELSŐSEGÉLY KIT ISKOLÁSOKNAK

A 2016-OS ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEINEK
MEGFELELŐ OKTATÁSI SEGÉDANYAG

Tartalomjegyzék

GEOMETRIA

1. Vektorok 1
   1.1. Irányított szakaszok. Vektorok 1
   1.2. Műveletek vektorokkal 3
   1.3. Kollineáris vektorok 6
   1.4. Helyzetvektor 8
   1.5. Párhuzamosság, összefutás, kollinearitás 10
   1.6. Skaláris szorzás 14
2. Analitikus geometria 18
3. Trigonometria 27
   3.1. A trigonometria elemei 27
   3.2. Trigonometrikus egyenletek 33
   3.3. Trigonometria síkmértani alkalmazásai 39

MATEMATIKAI ANALÍZIS

1. Valós számok, valós számhalmazok 42
2. Valós számsorozatok 45
   2.1. Valós sorozatok 45
   2.2. Műveletek valós sorozatokkal 47
   2.3. Egyenlőtlenségek és határértékek 50
   2.4. Konvergencia, monotonitás, korlátosság 51
   2.5. Részsorozatok 52
   2.6. Néhány fontos határérték 53
   2.7. Határozatlansági esetek feloldása 54
3. Függvényhatárértékek 57
   3.1. Függvény határértéke 57
   3.2. Határértékekkel végzett műveletek 60
   3.3. Határértékek tulajdonságai 61
   3.4. Fontos határértékek 63
4. Folytonos függvények 66
   4.1. A folytonosság értelmezése 66
   4.2. Műveletek folytonos függvényekkel 69
   4.3. Folytonosság és Darboux tulajdonság 70

5. Deriválható függvények 72
5.1. A derivált értelmezése 72
5.2. A derivált mértani jelentése 75
5.3. Műveletek deriválható függvényekkel 76
5.4. Elemi függvények deriváltjai 78
5.5. Összetett függvény deriváltja 79
5.6. Magasabb rendű deriváltak 81
5.7. A differenciálszámítás középértéktételei 83
5.8. Függvény grafikus képe 92
6. A határozatlan integrál 97
6.1. Primitív függvény. A határozatlan integrál . . . 97
6.2. Primitiválható függvények 100
6.3. A parciális integrálás módszere 103
6.4. Első helyettesítési módszer 105
6.5. Második helyettesítési módszer 108
6.6. Törtfüggvények integrálása 110
7. A határozott integrál 118
7.1. Riemann-integralható függvények 118
7.2. Integrálható függvények tulajdonságai 123
7.3. A parciális integrálás módszere 124
7.4. Első helyettesítési módszer 126
7.5. Második helyettesítési módszer 127
7.6. Középértéktételek 129
7.7. Az integrálszámítás alaptétele 130
7.8. A határozott integrál alkalmazásai 132

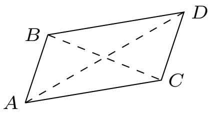
1. Vektorok

1.1. Irányított szakaszok. Vektorok

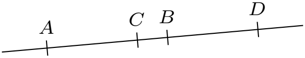
Irányított szakaszok

Értelmezés. Az (A,B) rendezett pontpárt **irányított szakasznak** nevezzük és így jelöljük: $\overline{AB}$.
Értelmezés. Az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ irányított szakaszokat **ekvipolenseknek** nevezzük (jelölés: $\overline{AB} \sim \overline{CD}$), ha az $[AD]$ és $[BC]$ szakaszok felezőpontjai egybeesnek.
Megjegyzés. Ha $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, akkor az $\overline{AB}$ szakaszt párhuzamos eltolással a $\overline{CD}$ szakaszra lehet helyezni.
Tulajdonság. Az irányított szakaszok halmazán az ekvipolencia egy *ekvivalencia-reláció*, azaz

- $\overline{AB} \sim \overline{AB}$ (*reflexív*),
- ha $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, akkor $\overline{CD} \sim \overline{AB}$ (*szimmetrikus*),
- ha $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ és $\overline{CD} \sim \overline{EF}$, akkor $\overline{AB} \sim \overline{EF}$ (*tranzitív*).



$\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ pontosan akkor ekvipolensek, ha $ABDC$ egy paralelogramma vagy az A,B,C,D pontok kollineárisak és az $[AD]$, $[BC]$ felezőpontja megegyezik.



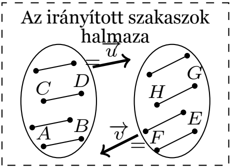
Vektorok

Értelmezés. Egy adott irányított szakasszal ekvipolens irányított szakaszok halmazát **vektornak** nevezzük.
Jelölés. Az $\overline{AB}$ irányított szakasz által meghatározott vektort $\overrightarrow{AB}$-vel (vagy egy kisbetűvel) jelöljük:

$$\overrightarrow{AB}=\left\{\overline{CD} \mid \overline{CD}\sim\overline{AB}\right\}.$$

Megjegyzés. Ha $\overline{AB}\sim\overline{CD}$, akkor $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Az $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ jelöléssel az $\overline{AB}$ (vagy a $\overline{CD}$) az $\overrightarrow{u}$ egy **reprezentánsa**.
Értelmezés. Az $\overrightarrow{u}$ **hossza (modulusza)** az őt reprezentáló irányított szakaszok közös hosszával egyenlő és $|\overrightarrow{u}|$-val jelöljük.
Értelmezés. A nulla hosszúságú $\overrightarrow{AA}$ vektort **nullvektornak** nevezzük.

Értelmezés. Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok **egyenlőek** (jelölés: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$), ha az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ irányított szakaszok ekvipolensek.
Megjegyzés. Két vektor akkor egyenlő, ha irányuk megegyezik (tartóegyeneseik párhuzamosak), hosszuk egyenlő és ugyanaz az irányításuk.
Tétel. (*Adott kezdőpontú reprezentáns létezése*) Ha adott az $\overrightarrow{u}$ vektor és egy tetszőleges M pont, akkor létezik egyetlen olyan M' pont, amelyre $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{MM'}$.
Következmény. Az egyértelműség alapján, ha $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$, akkor $A=B$.



A mellékelt ábrán
$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\ldots$,
$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}=\ldots$,
$\overline{CD}$ az $\overrightarrow{u}$ egy reprezentánsa,
$\overline{EF}$ a $\overrightarrow{v}$ egy reprezentánsa,
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

1.6. Skaláris szorzás

Két vektor szöge

Értelmezés. Legyen $\vec{u}\neq\vec{0}$ és $\vec{v}\neq\vec{0}$ két vektor. Ha O egy tetszőleges pont a síkban, A és B az $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ és $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ egyenlőségek által meghatározott pontok, akkor az $\widehat{AOB}\in[0,\pi]$ szöget az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ **vektorok szögének** nevezzük.

Jelölés. Az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ szögét így jelöljük: $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Értelmezés. Az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok **merőlegesek**, ha $m(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\dfrac{\pi}{2}$.

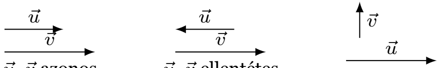
Két vektor skaláris sorzata

Értelmezés. Az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok **skaláris szorzata** az $\vec{u}\cdot\vec{v}$ -vel jelölt valós szám:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{cases} |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) & \text{ha } \vec{u}\neq\vec{0} \text{ és } \vec{v}\neq\vec{0} \\ 0 & \text{ha } \vec{u}\neq\vec{0} \text{ vagy } \vec{v}\neq\vec{0}. \end{cases}$$

Tétel. Két, a nullvektortól különböző vektor skaláris szorzata akkor és csakis akkor nulla, ha a vektorok merőlegesek egymásra: ha $\vec{u}\neq\vec{0}$, $\vec{v}\neq\vec{0}$, akkor $\quad \vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0.$

Példa. Néhány sajátos eset az alábbi ábrán látható:



$\vec{u}$, $\vec{v}$ azonos irányúak
$\alpha=0,$
$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ ellentétes irányúak
$\alpha=\pi,$
$\vec{u}\cdot\vec{v}=-|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ merőlegesek
$\alpha=\dfrac{\pi}{2},$
$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

A skaláris sorzás tulajdonságai

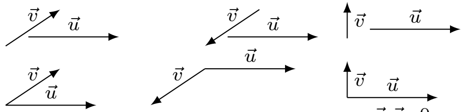
Tétel. Tetszőleges $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektorok és α, β valós számok esetén

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$;
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$, $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$;
- $(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})$;
- $(\alpha\vec{u})\cdot(\beta\vec{v})=\alpha\beta(\vec{u}\cdot\vec{v})$;
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}$, $(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}-\vec{v}\cdot\vec{w}$;
- $(-\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(-\vec{v})=-(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

Skaláris szorzat előjele

Tulajdonság. Az $\vec{u}\neq\vec{0}$ és $\vec{v}\neq\vec{0}$ vektorok esetén

- $\vec{u}\cdot\vec{v}>0$ akkor és csakis akkor, ha $m(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ akkor és csakis akkor, ha $m(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\dfrac{\pi}{2}$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$ akkor és csakis akkor, ha $m(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

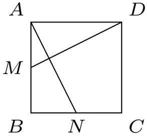


$\vec{u}\cdot\vec{v}>0$ $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

Feladat. *Legyen M és N az $ABCD$ négyzet $[AB]$ és $[BC]$ oldalának felezőpontja. Igazoljuk, hogy $AN\perp DM$.*

M. A kért állítás egyenértékű azzal, hogy $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$.
$p=\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AN}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN})=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}\cdot$

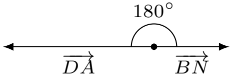
$\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}$.



$DA\perp AB\Rightarrow\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,
$AM\perp BN\Rightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=0$, így

$$p=0+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}+0=$$
$$=a\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos 180^\circ+\frac{a}{2}\cdot a\cdot 0^\circ+0=0,$$

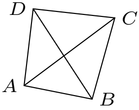
ahol a a négyzet oldalát jelöli.



Vektor skaláris négyzete

Értelmezés. Egy $\vec{u}$ vektornak önmagával vett skaláris szorzatát a vektor **(skaláris) négyzetének** nevezzük és így jelöljük: $\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}$.
Tétel. Bármely $\vec{u}$ vektor esetén $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$, tehát bármely $\overrightarrow{AB}$ vektor esetén $\overrightarrow{AB}^2=AB^2$.

Feladat. *Igazoljuk, hogy egy $ABCD$ négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha az oldalak négyzetének összege egyenlő a két átló négyzetének az összegével.*
M. $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=BD^2+AC^2\Leftrightarrow$



$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DA}^2=\overrightarrow{BD}^2+\overrightarrow{AC}^2\Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DA}^2=$$
$$=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})^2+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})^2\Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DA}^2=\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot$$
$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}^2\Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{BC}^2=2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow$$
$$(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})^2=2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{DC}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BA}=$$
$$2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\ \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}=0\Leftrightarrow$$

$(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC})^2=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABCD$ paralelogramma.

Metrikus összefüggések a háromszögben

Adott az ABC háromszög és legyen $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$.

Tétel. (*Koszinusz-tétel*) Az ABC háromszögben fennáll az

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$$

összefüggés.

Tétel. (*Stewart tétele*) Ha $M\in(BC)$, akkor

$$AB^2\cdot MC+AC^2\cdot BM=AM^2\cdot BC+BM\cdot MC\cdot BC.$$

Következmény. (*Oldalfelező hossza*) Az ABC háromszög A csúcsából kiinduló oldalfelezőjének hosszát (m_a) az

$$m_a^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$

képlettel számíthatjuk ki.

Következmény. (*Szögfelező hossza*) Az ABC háromszög A csúcsából kiinduló szögfelezőjének hosszát (l_a) az

$$l_a^2=\frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$$

képlettel számíthatjuk ki, ahol $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

Feladat. *Az ABC háromszögben $AB=2$, $AC=3$ és $BC=2$. Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ szorzatot!*

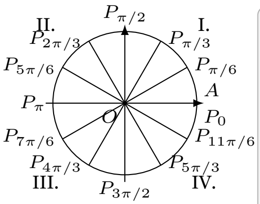
M. A koszinusz-tétel alapján $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\widehat{BAC} \Rightarrow 4=4+9-2\cdot 2\cdot 3\cos\widehat{BAC} \Rightarrow \cos\widehat{BAC}=\dfrac{3}{4}$. Tehát $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}=2\cdot 3\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{2}$.

3. Trigonometria

3.1. A trigonometria elemei

Szög-mértékegységek

Értelmezés. Egy kör félkerületének és sugarának aránya állandó és $\pi \approx 3{,}1415$-tel egyenlő.
Értelmezés. A kör sugarával megegyező hosszúságú körívhez tartozó középponti szög mértéke 1 **radián**.
Megjegyzés. Egy szögnek fokban illetve radiánban való mértéke közt fennáll az $\dfrac{\alpha}{x_r} = \dfrac{180}{\pi}$ összefüggés, ahol α a szög fokban kifejezett, x_r a szög radiánban kifejezett mértéke.



A trigonometrikus kör

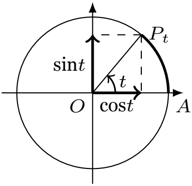
Értelmezés. Adott egy xOy derékszögű koordináta-rendszer. Az O középpontú, egységsugarú kört, amelyen kijelöltünk egy pozitív körbejárási irányt (az óramutató járásával ellentétes irányt), **trigonometrikus körnek** nevezzük.

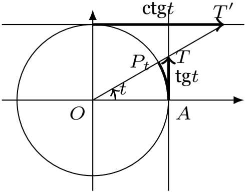
A trigonometrikus kör - folytatás

Jelölés. Legyen $t \in \mathbb{R}$ egy szám. Ekkor egyetlen olyan P_t-vel jelölt pont van a trigonometriai körön, amely $m(\widehat{AOP_t}) = t$.

Szinusz és koszinusz

Legyen t egy valós szám és P_t a hozzátartozó pont a körön.
Értelmezés. A P_t pont ordinátáját a t valós szám **szinuszának** nevezzük és így jelöljük: $\sin t$.
Értelmezés. A P_t pont abszcisszáját a t valós szám **koszinuszának** nevezzük és így jelöljük: $\cos t$.





Tangens és kotangens

Értelmezés. Az $x=1$ egyenletű függőleges egyenest **tangens-tengelynek**, az $y=1$ egyenletű vízszintes egyenest pedig **kotangens-tengelynek** nevezzük.

Értelmezés. Ha $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, P_t a t-nek megfelelő pont és T az OP_t egyenes és a tangens-tengely metszéspontja, akkor T ordinátáját t **tangensének** nevezzük és így jelöljük: $\operatorname{tg} t$.
Értelmezés. Ha $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, P_t a t-nek megfelelő pont és T' az OP_t egyenes és a kotangens-tengely metszéspontja, akkor T' abszcisszáját t **kotangensének** nevezzük és így jelöljük: $\operatorname{ctg} t$.

Fontosabb értékek

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\vert$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\mathrm{ctg} x$	$\vert$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\vert$

Visszavezetés az első negyedbe

$x \in C_2$	$x \in C_3$
$\sin x = \sin(\pi - x)$	$\sin x = -\sin(x - \pi)$
$\cos x = -\cos(\pi - x)$	$\cos x = -\cos(x - \pi)$
$\mathrm{tg} x = -\mathrm{tg}(\pi - x)$	$\mathrm{tg} x = \mathrm{tg}(x - \pi)$
$\mathrm{ctg} x = -\mathrm{ctg}(\pi - x)$	$\mathrm{ctg} x = \mathrm{ctg}(x - \pi)$

$x \in C_4$
$\sin x = -\sin(2\pi - x)$
$\cos x = \cos(2\pi - x)$
$\mathrm{tg} x = -\mathrm{tg}(2\pi - x)$
$\mathrm{ctg} x = -\mathrm{ctg}(2\pi - x)$

A trigonometrikus függvények előjele

x	0	N_1	$\frac{\pi}{2}$	N_2	π	N_3	$\frac{3\pi}{2}$	N_4	2π
$\sin x$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0
$\cos x$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	1
$\mathrm{tg} x$	0	$+$	$+\vert-$	$-$	0	$+$	$+\vert-$	$-$	0
$\mathrm{ctg} x$	$\vert+$	$+$	0	$-$	$-\vert+$	$+$	0	$-$	$-\vert$

A trigonometrikus függvények monotonitása

x	0	N_1	$\frac{\pi}{2}$	N_2	π	N_3	$\frac{3\pi}{2}$	N_4	2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	0
$\mathrm{ctg}\, x$	$\mid +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \mid$

Alapösszefüggések

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ (*a trig. alapképlete*)		$\mathrm{tg}\, x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\, x}$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$	$\sin(-x)=-\sin x$	$\sin(x+2\pi)=\sin x$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$	$\cos(-x)=\cos x$	$\cos(x+2\pi)=\cos x$
$\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\mathrm{ctg}\, x$	$\mathrm{tg}(-x)=-\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{tg}(x+\pi)=\mathrm{tg}\, x$
$\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{ctg}(-x)=-\mathrm{ctg}\, x$	$\mathrm{ctg}(x+\pi)=\mathrm{ctg}\, x$

Összeg, különbség szögfüggvényei

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$$

$$\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\mathrm{tg}\, x+\mathrm{tg}\, y}{1-\mathrm{tg}\, x\cdot\mathrm{tg}\, y} \qquad \mathrm{tg}(x-y)=\frac{\mathrm{tg}\, x-\mathrm{tg}\, y}{1+\mathrm{tg}\, x\cdot\mathrm{tg}\, y}$$

$$\mathrm{ctg}(x+y)=\frac{\mathrm{ctg}\, x\cdot\mathrm{ctg}\, y-1}{\mathrm{ctg}\, x+\mathrm{ctg}\, y} \qquad \mathrm{ctg}(x-y)=\frac{-\mathrm{ctg}\, x\cdot\mathrm{ctg}\, y-1}{\mathrm{ctg}\, x-\mathrm{ctg}\, y}$$

2. Valós számsorozatok

2.1. Valós sorozatok

Értelmezés. Valós sorozatnak nevezünk egy $f:\{k,k+1,k+2,\ldots\}\to\mathbb{R}$ függvényt ($k\in\mathbb{N}$). A sorozatot így jelöljük: (a_n), ahol $a_n=f(n)$.

Értelmezés. Az $(a_n)_{n\geq k}$ sorozat

- **növekvő**, ha $a_{n+1}\geq a_n$, $\forall n\geq k$;
- **csökkenő**, ha $a_{n+1}\leq a_n$, $\forall n\geq k$;
- **korlátos**, ha $\exists m,M\in\mathbb{R}$ úgy, hogy $m\leq a_n\leq M$, $\forall n\geq k$;
- **periodikus**, ha $\exists t\in\mathbb{N}^*$ úgy, hogy $a_{n+t}=a_n$, $\forall n\geq k$.

Sorozat határértéke

Értelmezés. Az $(a_n)_{n\geq k}$ sorozat **határértéke** az α valós szám, ha az α bármely V környezete esetén a sorozat csak véges számú tagja nem eleme V-nek:

(a_n) határértéke $\alpha\Leftrightarrow\forall V=V(\alpha)$, $\exists n_V\in\mathbb{N}$ úgy, hogy $a_n\in V$, $\forall n\geq n_V$.

Jelölés. Ha (a_n) határértéke α, ezt így írjuk: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$.

Tétel. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós elemű számsorozat, $\alpha\in\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ úgy, hogy $|a_n-\alpha|<\varepsilon$, $\forall n\geq n_0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ úgy, hogy $a_n>\varepsilon$, $\forall n\geq n_0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ úgy, hogy $a_n<-\varepsilon$, $\forall n\geq n_0$.

Sorozat határértéke - folytatás

Értelmezés. Egy (a_n) sorozat **konvergens**, ha van véges határértéke.
Ha (a_n) nem konvergens, akkor **divergens**.
Tétel. Ha (a_n) konvergens, akkor határértéke egyértelmű.
Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|=|\alpha|$.
Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|=0$.
Tétel. Ha (a_n) konvergens, akkor (a_n) korlátos.

Feladat. *Igazoljuk, hogy* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-1}=\frac{2}{3}$.
M. Igazolnunk kell, hogy $\forall\varepsilon>0$ esetén létezik olyan n_0 úgy, hogy bármely $n\geq n_0$ esetén $\left|a_n-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$, ahol $a_n=\frac{2n+1}{3n-1}$.

$$\left|\frac{2n+1}{3n-1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{3(3n-1)}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{3\varepsilon}<3n-1 \Leftrightarrow \frac{\frac{5}{3\varepsilon}+1}{3}<n,$$

így küszöbszámnak választható az $n_0=\left[\frac{5+3\varepsilon}{15}\right]+1$ érték ($[A]$ az A egész része).

Feladat. *Igazoljuk, hogy* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1}=\infty$.
M. Igazolnunk kell, hogy $\forall\varepsilon>0$ esetén létezik olyan n_0 úgy, hogy bármely $n\geq n_0$ esetén $\frac{n^2}{n+1}>\varepsilon \Leftrightarrow n^2-\varepsilon n-\varepsilon>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n\in\left(-\infty,\frac{\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}}{2}\right)\cup\left(\frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}}{2},\infty\right).$$

Az $n_0=\left[\frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon}}{2}\right]+1$ választással $a_n>\varepsilon$, $\forall n\geq n_0$.

3. Függvényhatárértékek

3.1. Függvény határértéke

Értelmezés. Azt mondjuk, hogy az $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subseteq\mathbb{R}$ függvény **határértéke** az $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontban $l\in\overline{\mathbb{R}}$, ha az l bármely V_l környezete esetén létezik az x_0 olyan U_{x_0} környezete, amelyre $\forall x\in U^*_{x_0}\cap D$ esetén $f(x)\in V_l$.

Jelölés. Ha az $f:D\to\mathbb{R}$ függvény határértéke az $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ pontban $l\in\overline{\mathbb{R}}$, akkor ezt így jelöljük: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$.

Tétel. *(A határérték Heine féle értelmezése)* Legyen $f: D\to\mathbb{R}$, $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$, $l\in\overline{\mathbb{R}}$. Egyenértékűek a következő állítások:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$,
- $\forall (x_n)_{n\geq 1}$, $x_n\in D$, $x_n\neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ sorozat $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$.

Feladat. *Igazoljuk, hogy az $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ függvénynek nincs határértéke az $x_0=0$ pontban!*

M. Tekintsük az $(x_n)_{n\geq 1}$ és $(x'_n)_{n\geq 1}$ sorozatokat, ahol $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$, $x'_n=\dfrac{2}{(4n+1)\pi}$.

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} x'_n=0$ és

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x'_n}=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{(4n+1)\pi}{2}=1,$$

így f-nek nincs határértéke 0-ban.

Határérték az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban

Értelmezés. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq x_0$ akkor $|f(x) - l| < \varepsilon$.
Értelmezés. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq x_0$ akkor $f(x) > \varepsilon$.
Értelmezés. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq x_0$ akkor $f(x) < -\varepsilon$.

Feladat. *Igazoljuk, hogy* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x^2} = \infty$*!*

M. Igazoljuk, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$ úgy, hogy ha $|x| < \delta$, $x \neq 0$, akkor $f(x) > \varepsilon$.

$$f(x) > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} > \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon x^2 - x + 1 < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} \right).$$

A $\delta = \min\left\{ \left| \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} \right|, \left| \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} \right| \right\}$ választással tehát $|x| < \delta \Rightarrow f(x) < \varepsilon$.

Határérték $+\infty$-ben

Értelmezés. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $x > \delta(\varepsilon)$ akkor $|f(x) - l| < \varepsilon$.
Értelmezés. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $x > \delta(\varepsilon)$ akkor $f(x) > \varepsilon$.
Értelmezés. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $x > \delta(\varepsilon)$, akkor $f(x) < -\varepsilon$.

Határérték $-\infty$-ben

Értelmezés. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0$ úgy, hogy ha $x<-\delta(\varepsilon)$ akkor $|f(x)-l|<\varepsilon$.
Értelmezés. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0$ úgy, hogy ha $x<-\delta(\varepsilon)$ akkor $f(x)>\varepsilon$.
Értelmezés. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0$ úgy, hogy ha $x<-\delta(\varepsilon)$, akkor $f(x)<-\varepsilon$.

Jobb és bal oldali határérték

Értelmezés. Azt mondjuk, hogy az $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subseteq\mathbb{R}$ függvény **bal oldali határértéke** az $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontban $l\in\overline{\mathbb{R}}$, ha az l bármely V_l környezete esetén létezik az x_0 olyan U_{x_0} környezete, amelyre $\forall x\in U^*_{x_0}\cap D$, $x<x_0$ esetén $f(x)\in V_l$.
Jelölés. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ vagy $\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x)$.
Tétel. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=l\Leftrightarrow$
$\forall(x_n)_{n\geq1}, x_n\in D, x_n<x_0,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ sorozat esetén $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$.
Megjegyzés. Hasonlóan értelmezhető a jobb oldali határérték is.
Tétel. Az $f:D\to\mathbb{R}$ függvénynek a D halmaz x_0 torlódási pontjában akkor és csakis akkor van határértéke, ha van bal és jobb oldali határértéke és ezek egyenlők.

6. A határozatlan integrál

6.1. Primitív függvény. A határozatlan integrál

Függvény primitív függvénye

Értelmezés. Legyen $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallum. Az f függvényt **primitiválhatónak** nevezzük, ha létezik olyan $F : I \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

- F deriválható I-n és
- $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

Értelmezés. Az értelmezésben szereplő F függvényt az f **egy primitív függvényének** nevezzük.

Függvény határozatlan integrálja

Értelmezés. Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ egy primitiválható függvény. Az f összes primitív függvényének halmazát az f **határozatlan integráljának** nevezzük és $\int f(x)dx$-szel jelöljük:

$$\int f(x)dx = \{F : I \to \mathbb{R} \mid F \text{ az } f \text{ egy primitív függvénye}\}.$$

Tétel. Ha F_1 és F_2 az $f : I \to \mathbb{R}$ két primitív függvénye, akkor létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $F_1(x) - F_2(x) = c$, $\forall x \in I$.
Ez alapján, ha F az f egy primitív függvénye, akkor

$$\int f(x)dx = \{F(x) + \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \in \mathbb{R}\} = F(x) + \mathcal{C}.$$

Műveletek primitiválható függvényekkel

Tétel. Legyen $f,g:I\to\mathbb{R}$ két, az I intervallumon primitiválható függvény és $\alpha\in\mathbb{R}$. Ekko5

- $f+g$ is primitiválható I-n és $\int f(x)+g(x)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$ (*„összeg integrálja egyenlő az integrálok összegével”*);
- $\alpha\cdot f$ is primitiválható I-n és $\int \alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx$ (*„konstans kiemelhető az integráljel elé”*);

Határozatlan integrálok

Az alábbi képletekben $I\subseteq\mathbb{R}$ egy intervallum, $f:I\to\mathbb{R}$, $a>0$.

A függvény	A függvény határozatlan integrálja
$f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$	$\int c\,dx=cx+\mathcal{C}$
$f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$	$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+\mathcal{C}$
$f(x)=x^\alpha$, $I\subseteq(0,\infty)$, $\alpha\neq-1$	$\int x^\alpha\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\mathcal{C}$
$f(x)=x^{-1}=\frac{1}{x}$, $0\notin I$	$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln\lvert x\rvert+\mathcal{C}$
$f(x)=a^x$, $a\neq1$	$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+\mathcal{C}$

Határozatlan integrálok - folytatás

Az alábbi képletekben $I\subseteq\mathbb{R}$ egy intervallum, $f:I\to\mathbb{R}$, $a>0$.

A függvény	A függvény határozatlan integrálja
$f(x)=\frac{1}{x^2-a^2}$, $-a,a\notin I$	$\int\frac{1}{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$
$f(x)=\frac{1}{x^2+a^2}$	$\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $I\subseteq(-\infty,-a)\ \vee$ $I\subseteq(a,\infty)$	$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx=\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert+C$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx=\ln\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\rvert+C$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $I\subseteq(-a,a)$	$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$
$f(x)=\sin x$	$\int\sin x\,dx=-\cos x+C$
$f(x)=\cos x$	$\int\cos x\,dx=\sin x+C$
$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ $I\subseteq(k\pi,(k+1)\pi)$	$\int\frac{1}{\sin^2 x}\,dx=-\operatorname{ctg} x+C$